Lehrblätter

für die

technische Ausbildung

in der Luftwaffe

Mathematische und

mechanische Grundbegriffe

Mathematische und mechanische Grundbegriffe

Lehrblätter für die technische Ausbildung in der Luftwaffe

Abriß der mathematischen und mechanischen Grundbegriffe

Berlin 1938

Verlag Bernard & Graefe, Berlin SW 68

Gedruckt bei Bernard & Graefe, Berlin SW 68

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil.

Mathematische Grundbegriffe.

II. Teil.

Mechanische Grundbegriffe.

III. Teil.

Anhang.

Formel- und Einheitszeichen

Zeichen	Eigenschaft	Zeichen	Eigenschaft
l	Länge	$=$	gleich
r	Halbmesser	$\neq$	nicht gleich
d	Durchmesser	$\equiv$	identisch
h	Höhe	$\approx$	nahezu, etwa, rund
F	Fläche	$<$	kleiner als
V	Rauminhalt	$>$	größer als
α, β ..	Winkel, Bogen	∞	unendlich
m	Masse	...	. bis .
t	Zeit	$\parallel$	parallel
n	Umlaufszahl/min	⋕	parallel und gleich
v	Geschwindigkeit	$\sphericalangle$	Winkel
b	Beschleunigung	log	Logarithmus
g	Fallbeschleunigung	lg	Briggs'scher Logarithmus
P	Kraft	ln	natürlicher Logarithmus
M	Moment	$^\circ$	Grad } Bogen
t	Temperatur vom Eispunkt aus	$'$	Minute } Bogen
T	absolute Temperatur $T = 273 + t$	$''$	Sekunde } Bogen
A	Arbeit	h	Stunde
N	Leistung	m	Minute
η	Wirkungsgrad	min	Minute (alleinstehend)
J	elektrische Stromstärke	s	Sekunde
E	elektromotorische Kraft, Spannung	We	Wärmeeinheit = 1 K cal.
		Kcal	Kilogramm calorie
		A	Ampere
		V	Volt
		Ω	Ohm
		W	Watt
		kW	Kilowatt
		kWh	Kilowattstunde

I. Teil.

Mathematische Grundbegriffe.

Einleitung.

1. Zum Verständnis der Zusammenhänge im Flugzeugbau und zur Beherrschung der in der Navigation gebräuchlichen Methoden gehört eine gewisse Kenntnis mathematischer Grundbegriffe.

2. Das Gebiet der Mathematik kann man unterteilen in:

A. Das Rechnen mit natürlichen und unbestimmten Zahlen.

B. Die Flächenberechnung und deren zeichnerische Bestimmung (Geometrie und Planimetrie).

C. Die Körperberechnung (Stereometrie).

3. Hilfsmittel zur Durchführung der Rechnungen sind:

Rechentafeln,
Rechenschieber,
Rechenmaschinen.

Rechentafeln und Rechenschieber finden weiteste Anwendung auf allen Gebieten des praktischen Rechnens.

A. Das Rechnen mit natürlichen und unbestimmten Zahlen.

4. Man kann folgende **Rechenverfahren** aufzählen:

a) Addieren und Subtrahieren (Zuzählen und Abziehen).

b) Multiplizieren und Dividieren (Vervielfachen und Teilen).

c) Potenzieren und Radizieren (Wurzelrechnungen).

d) Logarithmieren.

Logarithmen finden eine verbreitete Anwendung im Aufbau der Rechenschieber und der (nomographischen) Rechentafeln.

Die weiteren Operationen der Infinitesimalrechnung

e) Differentialrechnung und

f) Integralrechnung

sollen hier nur erwähnt, aber nicht betrachtet werden, da sie praktisch kaum eine wesentliche Bedeutung haben, dagegen meist durch die einfacheren Methoden der sogenannten „niederen" Mathematik ersetzt werden können.

5. Alle mathematischen Aufgaben und Verfahren sind **nicht Selbstzweck.** Die Begriffe stehen nicht abgelöst im Raume, sondern sind entstanden aus der Notwendigkeit des praktischen Lebens.

Mathematik, wie sie hier gebracht wird, ist lediglich der Ausdruck für die Verallgemeinerung von im täglichen Leben und in praktischer Arbeit gewonnenen Erfahrungen.

Darum ist Mathematik keine trockene Wissenschaft. Sie kann als solche nur erscheinen, wenn man sie losgelöst von allen Bezugswerten betrachtet.

6. Am Anfang des bewußten Denkens stand die **Zahl.**

Die Zahl als solche sagt nichts aus. Sie ist losgelöst (abstrakt). Z. B. sagt es nichts aus, wenn man an die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ... denkt.

Dagegen bekommt die Zahl sofort Leben, wenn man sie mit einem Begriff verbindet. Z. B.: 5 Pferde — 3 Reichsmark — 10 Kilometer.

Die Vorstellung setzt ein. Man kann sich etwas denken.

7. Der Zahl kann aber auch noch ein weiterer Wert beigemessen werden, den man bezeichnet als

positiv und negativ.

Auch von dieser Bewertung kann man sich leicht einen Begriff machen. Man kann eine positive Zahl als ein „Guthaben", eine negative als eine „Schuld" auffassen.

Hat man z. B. ein „Guthaben" von RM. 100.—, so kann man dieses ausdrücken als +100 (plus).

Ist gleichzeitig eine „Schuld" von RM. 30.—, also —30 (minus), vorhanden, so ist das übrigbleibende „Vermögen":

$$+100 - 30 = +70.$$

Oft sind aber die „Schulden" größer als das „Guthaben". Dann bleibt übrig ein negatives „Vermögen", d. h. eine „Schuld". Z. B. sei das „Guthaben" +70, die Schuld aber —100. Dann bleibt:

$$-100 + 70 = -30.$$

8. Zwischen „Guthaben" und „Schuld" steht der Begriff **Null**. Null ist die Aussage für Nichts, gewinnt aber seine besondere Bedeutung durch seine Stellung im Zahlensystem.

9. Das **Zahlensystem**, das heute bei allen zivilisierten Völkern Anwendung findet, ist ein Dezimalsystem. D. h., die einzelne Zahl (Ziffer) erhält ihre Bedeutung erst durch ihre Stellung in der Zahlenreihe. Ein Beispiel:

3	steht an erster Stelle (Einer).
35	3 rückt eine Stelle vor und bedeutet 3 Zehner.
378	3 rückt um eine weitere Stelle vor und bedeutet 3 Hunderter usf.

Die höchste Grundeinheit ist dabei immer 10 oder ein Vielfaches davon.

10. Nicht alle Völker haben ein dezimales Zahlensystem. So kannten die Römer beispielsweise ein additives, wie wir heute aus den noch vorhandenen Inschriften erkennen können. Die Zahl 1938 stellte sich danach folgendermaßen dar:

M	CM	XXX	V	III
(1000)	(1000 — 100)	(3 × 10)	(5)	(3)

oder in anderer Form:

M	D	CCCC	XXX	V	III
(1000)	(500)	(4 × 100)	(3 × 10)	(5)	(3)

Es ist klar, daß es schwer ist, mit einer solchen Zahlendarstellung zu operieren.

11. Auch die Grundeinheit war nicht immer 10, worauf ja unser Begriff „dezimal" zurückgeht.

So waren beispielsweise Zahlensysteme mit der Grundeinheit 12 bekannt. Daher rührt noch heute die abergläubige Scheu vor der Zahl 13, die also gewissermaßen den Neubeginn einer Zahlenreihe darstellt.

Anklänge an jene längst versunkenen Zahlensysteme findet man noch in der besonders bei dem konservativem Volk der Engländer beliebten Rechnung nach Dutzend, Gros (12 Dutzend) usf.

12. Schließlich ist noch eine Prüfung der höchsten und der niedrigsten Zahl nötig.

Primitive Völker haben ein sehr eingeengtes Zählvermögen. Mit der Zahl 3 ist oft ihr Zahlbegriff erschöpft. Wenn sie also von einem Geschwader von 6 Flugzeugen überflogen werden, werden sie nicht berichten, daß sie 6 Maschinen gesehen haben, sondern werden sich ausdrücken „3 und 3".

Im Dezimalsystem bezeichnet man die höchste Zahl mit **„Unendlich"**. Man verknüpft damit keine Vorstellung mehr, sondern will nur aussagen, daß die genannte Zahl größer ist als jede andere.

Die Zahl „Unendlich" (∞) kann nach dem unter 7. Gesagten sowohl positiv als auch negativ sein.

Eine Zahl kleiner als 1 ist sicher $1/2$, $1/5$, $1/100$, $1/1000$ usf. Die kleinst erreichbare Zahl ist dann $1/\infty$. Sie nähert sich der Null, ohne diese aber ganz zu erreichen. Sie bleibt von der Null immer noch um ein unendlich kleines Stückchen entfernt.

13. Die Gesetzmäßigkeiten, mit welchen man in unserm Zahlensystem zu rechnen hat, gelten auch dann, wenn man keine Begriffe mehr mit ihnen verbinden kann oder will. Es sind:

2 Äpfel + 2 Äpfel = 4 Äpfel

oder ohne Begriffsverbindung

$$2 + 2 = 4.$$

Dagegen sind

3 Äpfel + 4 Birnen = 3 Äpfel + 4 Birnen.

Ein Zusammenzählen ist nicht mehr möglich, wenn man nicht einen übergeordneten Begriff, wie hier etwa die Stückzahl, einführen will.

14. **Algebraische Zahlen** sind solche, bei denen man den Begriff wegläßt und durch einen Buchstaben ersetzt.

Man kann sich beispielsweise vorstellen, daß man für den Begriff „Äpfel" ein a und für den Begriff „Birne" ein b setzt usf.

Dann hat man

$$3a + 4a = 7a$$
$$5b - 2b = 3b$$
$$2a + 3b = 2a + 3b,$$

oder: im Geschwader sind 15 Doppeldecker (d) und 7 Eindecker (e), also $15d + 7e = 15d + 7e$. Eine direkte Addition wird erst möglich in dem übergeordneten Begriff „Flugzeug". Es sind vorhanden:

22 Flugzeuge (f)

also $15d + 7e = 22f$.

Diesen Ausdruck nennt man übrigens **„Gleichung"**, weil rechts und links des Gleichheitszeichens die gleichen Wertinhalte stehen.

Würde dem Geschwaderkommodore der Ausfall von 3 Eindeckern und 2 Doppeldeckern gemeldet werden, so hätte der Ausdruck das folgende Aussehen:

$$\underbrace{15d - 2d}_{13d} + \underbrace{7e - 3e}_{4e} = 17f$$

Der meldende Flugleiter wird dabei gewiß nicht den Eindruck haben, eine algebraische Gleichung gelöst zu haben.

15. An sich ist es **gleichgültig, in welcher Reihenfolge die einzelnen Glieder auftreten.** Man kann also sagen:

$$15d + 7e = 22f$$

oder $7e + 15d = 22f$

$$15d - 2d + 7e - 3e = 17f$$

oder $15d + 7e - 2d - 3e = 17f.$

16. Man kann die algebraischen Zahlen auch multiplizieren (vervielfachen) [und dividieren (teilen)].

Es ist $a \cdot b = a \cdot b$

und $a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot c.$

Die einzelnen Glieder nennt man **Faktoren.**

Die **Reihenfolge der Faktoren ist beliebig,** denn es ist gleichgültig, ob man sagt

$$2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

oder $7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$

Also ist es auch gleich, ob man schreibt

$$a \cdot b \cdot c$$

oder $c \cdot a \cdot b$ usf.

17. Die a und b kann man nicht einem Begriff unterordnen, wohl aber die beistehenden Zahlen.

Also ist zwar

$$a \cdot b = a \cdot b$$

aber $3\,a \cdot 4\,b = 12\,a \cdot b$

oder $3\,a \cdot 4\,b \cdot 7\,c = 84\,a \cdot b \cdot c.$

18. Hat man gleiche Begriffe miteinander zu multiplizieren, so kann man sich einer Abkürzung bedienen. Man schreibt:

$a \cdot a \cdot a = a^3$ (a hoch 3)

oder $b \cdot b = b^2$ (b hoch 2 oder b quadrat)

und nennt das ganze dann **Potenzieren** (vgl. 35 u. 47).

Man kann also auch schreiben für

$$3\,c \cdot 5\,c \cdot 2\,c = 30\,c^3.$$

Man multipliziert also die bestimmten Zahlen und zieht die algebraischen (unbestimmten) Zahlen zu einer Potenz zusammen.

Man nennt dabei:

Die untenstehenden Zahlen (a, b, c usf.) die **Basis.**

Die hochgesetzten Zahlen (2, 3 usf.) den **Exponenten.**

19. Eine **Division** wird in gleicher Form dargestellt. Nur bedient man sich allgemein nicht des :-Zeichens, sondern des Bruchstriches. Z. B.:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

oder
$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, \quad \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

Gleiche Größen lassen sich kürzen, z. B.:

$$\frac{a \cdot b}{b} = a$$

oder
$$\frac{a \cdot b \cdot c}{a} = b \cdot c$$

Genau, so wie man oben kürzen könnte

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 2 = 6$$

20. Eine weitere Möglichkeit zur Abkürzung der Rechnungsverfahren besteht in der Zusammenfassung gleichartiger oder zusammengehöriger Begriffe in einem **Klammerausdruck**.

Ein Beispiel soll dies erläutern:

In einem Geschwader sind 27 Flugzeuge (f). Davon sind 21 Doppeldecker (d) und 6 Eindecker (e). Mathematisch würde die Aufstellung zunächst so aussehen:

$$21\,d + 6\,e = 27\,f.$$

Nun gehöre zu jedem Flugzeug ein BMW. VI-Motor (b). Man hätte also

$$21\,d \cdot b + 6\,e \cdot b = 27\,f \cdot b$$

oder, indem man die Motoren zusammenfaßt

$$b \cdot (21\,d + 6\,e) = 27\,f \cdot b$$

Ganz allgemein:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$$

Jede Klammer ist ein Ausdruck für sich und muß während der folgenden Rechnung als geschlossenes Ganzes behandelt werden.

Also ist auch hier die Reihenfolge der Faktoren gleich, denn der Klammerausdruck ist nichts weiter als ein Faktor. Also

$$\underbrace{a \cdot (b+c) \cdot b}_{(1)} = \underbrace{a \cdot b\,(b+c)}_{(2)} = \underbrace{b \cdot (b+c) \cdot a}_{(3)}$$

Beim Multiplizieren ergibt sich nach (1)

$$a \cdot (b+c) \cdot b = (a\,b + a\,c)\,b$$

oder nach (2)

$$a \cdot b \cdot (b+c) = a \cdot b \cdot b + a \cdot b \cdot c$$

was man übrigens aus der Fortführung des Verfahrens nach (1) ebenfalls errechnen kann.

Nach **18.** kann man noch weiter vereinfacht schreiben

$$a \cdot b \cdot (b+c) = a\,b^2 + a\,b \cdot c$$

21. Unter Ziffer 7. hat man gehört, daß es positive und negative Zahlen gibt. Wie sich diese Zahlen bei der Addition und Subtraktion auswirken, ist klar geworden.

Nicht schwerer ist es, zu begreifen, was zu tun ist, wenn sich in der Multiplikation und Division negative und positive Zahlen begegnen. Zur Vereinfachung merke man sich folgende **Regel:**

$$+ \cdot + = +$$

$$+ \cdot - \text{ oder } - \cdot + = -$$

$$- \cdot - = +$$

$$\frac{+}{+} = +$$

$$\frac{-}{+} \text{ oder } \frac{+}{-} = -$$

$$\frac{-}{-} = +$$

Einige Beispiele mögen die Anwendung zeigen:

$$+2 \cdot -3 = -6, \quad +a \cdot -b = -a \cdot b, \quad -3a \cdot -5b = +15\,a \cdot b$$

$$-5 \cdot -7 = +35, \quad -a \cdot -b = +a \cdot b$$

$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{+15\,a}{-3\,b} = -5\,\frac{a}{b}$$

Ist kein Vorzeichen vorgesetzt, so ist die Zahl als **positiv** anzunehmen. Also:

$$a \cdot -b = -a \cdot b$$

denn $a = +a$

22. Bisher wurden ganze Zahlen besprochen, also 1, 2, 3 usf. oder aber a, b, c usf.

Natürlich stellt das Zahlensystem eine **ununterbrochene Reihe**, ein Kontinuum dar.

Zwischen den Zahlen 0 und 1, zwischen 1 und 2, 2 und 3 usf. liegen Zwischenwerte, die ebenfalls erfaßt werden müssen.

Dies geschieht durch die **Bruchrechnung.**

23. In der **Bruchrechnung** unterscheidet man:

a) echte Brüche,
b) unechte Brüche,
c) Dezimalbrüche.

24. **Echte Brüche** sind solche, bei denen der

$$\frac{\text{Zähler klein}}{\text{Nenner groß}}$$ ist.

Dabei stellt man die Brüche durch einen Bruchstrich dar, wobei die über dem Bruchstrich stehende Zahl der **Zähler**, die unter dem Bruchstrich stehende Zahl der **Nenner** heißt. Z. B.:

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$$

Der zahlenmäßige Wert eines echten Bruches ist stets kleiner als 1.

25. Einen Ausdruck wie etwa

$$\frac{15}{3} = 5 \qquad \frac{\text{Zähler groß}}{\text{Nenner klein}}$$

nennt man einen **unechten Bruch.**

26. Jeder Bruch kann in einen **Dezimalbruch** durch Ausführung der Division durchgeführt werden.

Beispiele: $\frac{3}{8} = 3:8 = \mathbf{0{,}375}$

$$\frac{1}{10} = \mathbf{0{,}1}\ ,\quad \frac{2}{10} = \mathbf{0{,}2}$$

$$\frac{1}{10}\cdot 4 = 0{,}1\cdot 4 = \mathbf{0{,}4}$$

$$0{,}1 + 0{,}4 = \mathbf{0{,}5}$$

27. Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert.

Beispiele: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{a} = \frac{3+2}{a} = \frac{5}{a}$$

28. Sollen ungleichnamige Brüche addiert werden, so sind sie zunächst gleichnamig zu machen.

Man macht Brüche gleichnamig, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Z. B.:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2} = \frac{6}{8}$$

Da $\frac{2}{2} = 1$ ist, ändert man mit der Multiplikation nichts am Werte des Ausdruckes.

Beispiele: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{d} + \frac{c}{d}\cdot\frac{b}{b} = \frac{a\cdot d + cd}{d\cdot b}$$

29. Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler multipliziert.

Beispiele: $\frac{2}{7}\cdot 3 = \frac{2\cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b}$$

30. Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert.

Beispiele: $$\frac{2}{3} : 3 = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

31. Ein Bruch wird mit einem Bruch multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Beispiele: $$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

32. Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man ihn mit dessen reziprokem (umgekehrtem) Werte multipliziert.

Beispiele: $$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

33. In Ziffer 28 wurde gezeigt, daß sich Brüche erweitern lassen. In der gleichen Weise können auch **Kürzungen** vorgenommen werden.

Beispiele: $$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a \cdot b + a \cdot c}{a \cdot d} = \frac{a \cdot (b + c)}{a \cdot d} = \frac{b + c}{d}$$

Da Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert werden, wird an dem Werte des Ausdrucks nichts geändert.

34. In vielen Fällen wird es nötig sein, den Anteil eines Wertes am gesamten Ausdruck auf 100 zu beziehen. Man nennt dies Verfahren dann **Prozentrechnung** oder **von-Hundert-Rechnung.**

Die Rechnungsdurchführung zeigt das folgende Beispiel:

1. Von 131 Flugzeugen sind

8 in der Werft,
12 unklar,
1 gesperrt;
also 21 nicht einsatzbereit.

Klar sind 131 — 21 = 110 Flugzeuge.

Der von-Hundert-Ansatz lautet:

Von 131 Flugzeugen sind 110 klar,

von 1 Flugzeug sind $\frac{110}{131}$ klar,

von 100 Flugzeugen sind $\frac{110}{131} \cdot 100$ klar,

oder **84 v. H.**

Wieviel v. H. sind auf der Werft?

Nach dem gleichen Ansatz

$\frac{8}{131} \cdot 100 = \mathbf{6{,}1}$ **v. H.**

Wieviel sind unklar?

$\frac{12}{131} \cdot 100 = \mathbf{9{,}15}$ **v. H.**

Wieviel sind gesperrt?

$\frac{1}{131} \cdot 100 = \mathbf{0{,}75}$ **v. H.**

Zusammengezählt müssen die v.-H.-Zahlen die Summe **100** ergeben.

$84 + 6{,}1 + 9{,}15 + 0{,}75 = \mathbf{100{,}00}.$

2. Es sollen von einem Verbande befehlsgemäß 12 v. H. der Flugzeuge abgegeben werden. Der Bestand ist 67 Flugzeuge.

Der Ansatz lautet:

Von 100 Flugzeugen sind 12 abzugeben,

von 1 Flugzeug sind $\frac{12}{100}$ abzugeben,

von 67 Flugzeugen sind $67 \cdot \frac{12}{100}$

oder 8,04 Flugzeuge, also **8 Flugzeuge** abzugeben.

Man kann **sich merken:**

Ist der von-Hundert-Satz gegeben, z. B. p, so erhält man die gewünschte Stückzahl, z. B. x, aus dem Bestand, z. B. b, indem man diesen mit $\frac{p}{100}$ multipliziert. Der Ansatz lautet allgemein:

$$(1)\quad x = \frac{b \cdot p}{100}$$

$$\text{oder } (2)\quad p = \frac{100x}{b} \longrightarrow \text{(Erstes Beispiel.)}$$

$$\text{oder } (3)\quad b = \frac{100x}{p}$$

Ein weiteres Beispiel soll die Anwendungsmöglichkeit dieser „Formel" erläutern.

3. In einem Verbande wurden 8 Flugzeuge angeliefert, da eine Erhöhung des Bestandes um 5 v. H. vorgesehen war. Wie groß war der Bestand nach und vor der Anlieferung?

In „Formel" (3) bedeuten nach der Aufgabe $x = 8$, $p = 5$ v. H.

Die „Formel" (3) wird verwendet, weil nach dem Bestand b gefragt wird. Mit den Zahlenwerten lautet die „Formel":

$$\text{Bestand } b = \frac{100 \cdot 8}{5} = \mathbf{160 \text{ Flugzeuge.}}$$

Vor der Anlieferung waren also vorhanden:

$$160 - 8 = \mathbf{152 \text{ Flugzeuge.}}$$

35. Bereits unter Ziffer **18** hat man den Ausdruck **„Potenz"** kennengelernt. Man sah, daß man vereinfacht schreiben kann

$$a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 \quad \text{usf.}$$

Die untenstehende Zahl wurde mit **Basis**, die obenstehende mit **Exponent** bezeichnet.

So lang der Exponent eine **ganze Zahl** ist, macht die Rechnung keine Schwierigkeiten. Z. B.:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \quad \text{usf.}$$

Wird der Exponent jedoch eine **gebrochene Zahl,** z. B.

$$3^{2,5}$$

so ist die Rechnung mit einfachen Hilfsmitteln nicht mehr durchführbar. Man benutzt die später zu besprechenden logarithmischen Verfahren.

36. Potenzen können addiert werden, wenn sie die gleiche Basis und den gleichen Exponenten haben. Z. B.

$$2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$a^3 + a^3 = 2 \cdot a^3$$

Dagegen bleibt $a^3 + b^3 = a^3 + b^3$

Bei ungleichen Exponenten kann man sich helfen, indem man eine Ausklammerung vornimmt (vgl. auch Ziffer 38). Z. B.:

$$a^2 + a^3 = a^2 \cdot (1 + a).$$

37. Für die **Subtraktion der Potenzen** gelten die gleichen Regeln wie für die Addition.

38. Potenzen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert. Z. B.:

$$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$$

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243.$$

Voraussetzung ist dabei, daß die Basis die gleiche ist.

39. Potenzen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert. Z. B.:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9.$$

Auch hier ist die Voraussetzung, daß die Basis die gleiche ist.

40. Sind die **Exponenten gleich** und die Basis verschieden, dann werden die Basiswerte miteinander multipliziert. Z. B.:

$$a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$$

$$5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2 = 15^2 = 225.$$

41. Die Division bei **gleichen Exponenten** erfolgt durch die Division der Basiswerte. Z. B.:

$$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

$$\frac{6^2}{3^2} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

42. Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert. Z. B.:

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729.$$

43. Das Vorzeichen des Exponenten kann positiv und negativ sein. Den Einfluß des Exponentenvorzeichens auf die Stellung der Basis zeigen folgende Beispiele:

$$\frac{1}{a^3} = a^{-3}, \quad \frac{1}{b^{-4}} = b^4.$$

Man kann also die Basis sowohl im Zähler als auch im Nenner einsetzen, muß jedoch dann stets das Vorzeichen wechseln. War es positiv, so wird es negativ und umgekehrt.

$$\frac{a^3 \cdot b^5}{c^3 \cdot b^2} = \frac{a^3 \cdot b^3}{c^3} = \frac{(a \cdot b)^3}{c^3} = \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^3$$

$$\frac{a^5 \cdot b^7}{a^2 \cdot b^4} : \frac{c^3 \cdot d^2}{c^5} = \frac{a^5 \cdot b^7}{a^2 \cdot b^4} \cdot \frac{c^5}{c^3 \cdot d^2} = a^3 \cdot b^3 \cdot \frac{c^2}{d^2} = (a \cdot b)^3 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

$$\frac{a^5 \cdot b^3}{c^2 \cdot b^5} = \frac{a^5}{c^2 \cdot b^2} = \frac{a^5}{(c \cdot b)^2} = a^5 \cdot (c \cdot b)^{-2}.$$

44. Einige **Sonderwerte:**

Es ist stets:

a) $(-1)^n = +1$, wenn n eine **gerade** Zahl ist,

$= -1$, wenn n eine **ungerade** Zahl ist.

Z. B.: $-1^4 = +1$, denn $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = +1$ (vgl. Ziff. 21)

$-1^3 = -1$, denn $\underbrace{(-1) \cdot (-1)}_{(+1)} \cdot \underbrace{(-1)}_{(-1)} = -1$.

b) $a^0 = 1$, wenn a ein von Null verschiedener Wert ist. Denn 0^0 wäre sinnlos.

Z. B.: $5^0 = 3^0 = 7^0 = 1$

c) $0^n = 0$, was selbstverständlich ist.

45. Die Multiplikation von Klammerausdrücken wird so durchgeführt, daß jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird.

Beispiel:
$$(a - b) \cdot (a + b) =$$
$$a^2 - a\,b + a\,b - b^2 = a^2 - b^2.$$

Gleiche Plus- und Minuswerte kann man wegstreichen. Sie ergeben Null (denn 30.— Guthaben und 30.— Schulden ergeben ein Vermögen = 0).

46. Klammerausdrücke kann man auch potenzieren. Die Potenzierung wird dabei, wo möglich, auf eine einfache entsprechend dem Exponenten häufig durchgeführte Multiplikation zurückgeführt.

Beispiele:
$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) =$$
$$a^2 + a\,b + a\,b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$
$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) =$$
$$a^2 - a\,b - a\,b + b^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$
$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b).$$

Davon ist schon bekannt: $(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2\,a\,b + b^2$, so daß man schreiben kann
$$(a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + 2\,a^2 b + a\,b^2 + a^2 b + 2\,a\,b^2 + b^3 =$$
oder zusammengefaßt:
$$a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3.$$

47. Die in Ziffer 46 gerechneten Beispiele führen auf den **binomischen Satz**, der universal alle Potenzen eines aus 2 Gliedern bestehenden Klammerausdruckes umfaßt. Er hat die Form
$$(a \pm b)^n = a^n \pm n\,a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}\,a^{n-2} \cdot b^2 \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 \pm \ldots$$

n muß dabei eine ganze positive Zahl sein. Die doppelten Vorzeichen sollen angeben, wie sich der Ausdruck bei Änderungen der Vorzeichen gestaltet.

48. Wie das Dividieren eine dem Multiplizieren entgegengesetzte Rechnungsoperation darstellt, so ist die dem **Potenzieren entgegengesetzte Rechnungsoperation das Radizieren** oder **Wurzelziehen.**

Allgemein sieht eine Wurzelrechnung wie folgt aus:

$$\sqrt[n]{a} = b.$$

Man bezeichnet dabei

a als den Radikanden, d. h. die Zahl, die radiziert (gewurzelt) werden soll,

b als die Wurzel des Radikanden,

n als den Wurzelexponenten.

Inwiefern die Radizierung eine Umkehrung der Potenzierung ist, zeigen die folgenden Beispiele:

1. $2^2 = 4, \quad \sqrt[2]{4} = 2.$

Anmerkung:

Man läßt bei der Quadratwurzel mit dem Exponenten 2 die Exponenten meist weg und schreibt nur:

$$\sqrt{4} = 2.$$

2. $2^3 = 8, \quad \sqrt[3]{8} = 2.$

Die Schwierigkeit in der Durchführung der Rechnung bei verschiedenen Wurzelexponenten wird durch die später zu betrachtende Logarithmenrechnung überwunden.

49. Man kann jede Wurzelform in eine Potenzform überführen und dann nach den in Ziffer **35...43** gezeigten Gesetzmäßigkeiten behandeln.

Beispiele:

Es ist: $$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

also $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ oder mit Zahlen $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$.

Dementsprechend gilt natürlich auch:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{n}}} = a \cdot b^{-\frac{1}{n}}$$

also auch

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{2}}} = a \cdot b^{-\frac{1}{2}}$$

oder mit Zahlen:

$$\frac{40}{\sqrt[2]{100}} = \frac{40}{100^{\frac{1}{2}}} = 40 \cdot 100^{-\frac{1}{2}}.$$

50. Das Wurzelzeichen über einem Produkt mit mehreren Faktoren gilt auch für die einzelnen Faktoren.

Beispiele:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

oder

$$\sqrt[n]{(a+b) \cdot c} = \sqrt[n]{a+b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

51. Das Wurzelzeichen über einem Quotienten gilt gleichermaßen für Zähler und Nenner.

Beispiele:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

oder

$$\sqrt[n]{\frac{a \cdot b}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}}.$$

Der gleiche Wurzelexponent vereinigt also alle Radikanden.

In der Potenzform (vgl. Ziffer **49**) kann das Beispiel weiterentwickelt werden in

$$\frac{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}} = \frac{a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} = \frac{(a \cdot b)^{\frac{1}{n}}}{c^{\frac{1}{n}}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} \cdot c^{-\frac{1}{n}}.$$

52. Die in Ziffer 49 dargestellte Potenzform läßt sich **natürlich für alle möglichen Exponenten anwenden.**

Es ist z. B.: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$ und $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Demnach ist auch: $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

d. h. also: **wird eine Zahl mit einem Bruch potenziert, so tritt der Nenner des Bruches als Wurzelexponent und der Zähler des Bruches als Exponent der Basis, jetzt des Radikanden, auf.**

Ein weiteres Beispiel:

$$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \quad \text{oder} \quad a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

53. **Sind zwei Wurzeln mit gleichen Radikanden und verschiedenen Wurzelexponenten zu multiplizieren,** so verfährt man nach Ziffer 52 wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

Die Exponenten werden nach Ziffer 27 addiert:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{n \cdot m}$$

so daß der Ausdruck lautet:

$$a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{n \cdot m}}$$

was nach Ziffer 52 gleich ist:

$$\sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

oder das Beispiel in Zahlen:

$$\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[2]{27} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{1}{2}} = 27^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 27^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{27^5}$$

54. **Sind zwei Wurzeln mit gleichen Radikanden zu dividieren, so gilt die gleiche Form** nach folgendem Beispiel:

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} \quad \text{(Ziffer 49 u. 52)}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} \quad \text{(Ziffer 38)}$$

$$a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{m-n}{m \cdot n}} \quad \text{(Ziffer 27)}$$

$$a^{\frac{m-n}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m-n}} \quad \text{(Ziffer 52)}$$

55. **Die Wurzel aus einer Potenz ergibt** sich in der gleichen Weise:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

oder mit Zahlen: $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$.

56. Damit ist auch der Übergang **zu einer Wurzel aus einer Wurzel** gefunden.

Ein Erläuterungsbeispiel:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \text{(Ziffer 52).}$$

Ein Zahlenbeispiel:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \text{(rechnerisch)} \; \sqrt[3]{8} = 2.$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \text{(umgeformt)} \; \sqrt[3]{64^{\frac{1}{2}}} = 64^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Man kann also sagen:

Eine Wurzel wird aus einer Wurzel mit verschiedenen Wurzelexponenten und gleichen Radikanden gezogen, indem man die Wurzelexponenten multipliziert.

57. **Dem Vorzeichen nach kann jede Quadratwurzel sowohl positiv als auch negativ sein.**

Welches das richtige Ergebnis ist, muß die praktische Möglichkeit entscheiden.

Es kann also sein:

$$\sqrt{a^2} = + a \text{ oder } - a,$$

denn nach Ziffer 20 ist sowohl

$$+ a \cdot + a = + a^2$$

als auch $$- a \cdot - a = + a^2.$$

Hat man also das Ergebnis in der Form vorliegen

$$\sqrt{9}$$

so kann die Lösung $+3$ oder -3 sein.

Welches die richtige ist, ergibt sich aus der praktischen Notwendigkeit.

58. Hat man den Fall vorliegen:

$$\sqrt{-a}$$

so ist eine einfache Lösung nicht mehr möglich.

Das Ergebnis nennt man eine

imaginäre Zahl,

die für die vorliegenden praktischen Belange keine Bedeutung hat.

Es sei hier nur bemerkt, daß man bezeichnet:

$$\sqrt{-1} = i$$

womit die imaginäre Größe ausgedrückt sein soll.

Man weiß, daß $\sqrt{1} = 1$ ist, denn es ist $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$.

$\sqrt{-1}$ ist also nicht lösbar. Dagegen kann man in einem allgemeinen Ausdruck von der Form

$$\sqrt{-a}$$

schreiben.

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a}$$

oder nach dem oben Gesagten:

$$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}.$$

59. Da eine Lösung der Wurzeln nicht immer einfach ist, werden hier einige **Sonderfälle** angeführt, die eine wenigstens angenäherte Lösung ergeben, wenn es gelingt, den mathematischen Ausdruck auf die angegebene Grundform zurückzuführen.

$$\text{I.} \quad \sqrt{a^2 \pm b} = \approx a \pm \frac{b}{2a}$$

$$\text{II.} \quad \sqrt[3]{a^3 \pm b} = \approx a \pm \frac{b}{3a^2}$$

also allgemein:

$$\text{III.} \quad \sqrt[n]{a^n \pm b} = \approx a \pm \frac{b}{n \cdot a^{n-1}}$$

(Die Formeln I—III gelten nur, wenn b gegenüber a klein ist.)

$$\text{IV.} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \approx 0{,}960\,a + 0{,}3986$$

oder genauer:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \approx 0{,}9948\,a + 0{,}0703\,b + 0{,}3567\,\frac{b^2}{a}$$

wenn b gegenüber a klein ist.

$$\text{V.} \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \approx 0{,}939\,a + 0{,}3896\,b + 0{,}297\,c.$$

Wenn a größer b und b größer d ist, was in der mathematischen Zeichenform folgendermaßen ausgedrückt wird:

$$a > b > c.$$

60. Potenzieren und Radizieren ist, wie erwähnt, mit den normalen rechnerischen Hilfsmitteln nicht immer möglich.

Man erfand daher bereits im ausgehenden Mittelalter ein **Rechenverfahren,** das man das **Logarithmische** nannte.

Nachdem gezeigt wurde, daß die Potenzrechnung und die Wurzelrechnung trotz ihrer inneren Umkehrbarkeit stets auf eine Potenzform zurückzuführen sind, kann man die logarithmische Rechnung als die Umgestaltung der Potenzrechnung in eine multiple Form und die der Multiplikation und Division in eine additive Form auffassen.

61. Der in der Potenzrechnung übliche Ausdruck

$$b^n = a$$

sieht in der logarithmischen Rechnung folgendermaßen aus:

$$_b \cdot \log a = n$$

d. h. mit anderen Worten:

Eine Zahl log a, bezogen auf eine Basis b, muß den Exponenten n angeben.

62. Die Basis b des Logarithmus kann jede beliebige Zahl sein.

Will man jedoch mit einem Logarithmus rechnen, so muß man sich auf eine bestimmte, allgemeingültige Basis einigen.

Dann erst ist es möglich, für die verschiedenen Werte von n Tafeln, die sogenannten **Logarithmentafeln,** aufzustellen.

Übereinkommengemäß nahm man als **Basis die Zahl 10 an,** da diese sich mit anderen Basiszahlen in einfache Verbindung bringen läßt. Man nennt die auf der Basis 10 errechneten Logarithmen nach dem Urheber der ersten Tafeln **Briggssche Logarithmen.**

63. Im Gegensatz zu den Briggsschen Logarithmen stehen die **natürlichen Logarithmen,** die aus inneren mathematischen Gründen, die zu schildern hier unterbleiben kann, auf die Basis

$$\underline{e = 2,71828\ldots}$$

zurückgeführt werden.

64. Um eine **Unterscheidung zwischen den Briggsschen und natürlichen Logarithmen** zu erhalten, wählte man die Bezeichnung

lg für Briggssche Logarithmen,

ln für natürliche Logarithmen.

65. Praktische Verwendung haben im allgemeinen nur die Briggsschen Logarithmen gefunden.

Wie ihre in den Tabellen zusammengetragenen Werte zur einfachen Berechnung verwickelter Rechnungsansätze Verwendung finden, wird in den folgenden Ziffern gezeigt.

66. Die Multiplikation löst sich logarithmisch in eine Addition auf. Anstatt die Multiplikation $a \cdot b$ durchzuführen, kann man auch logarithmisch schreiben:

$$lg \cdot (a \cdot b) = lg \cdot a + lg \cdot b.$$

Ein Zahlenbeispiel:

$$lg\,(15 \cdot 27) = lg\ 15 + lg\ 27.$$

Auf der Logarithmentafel findet man (siehe **Anhang 1**):

$$\begin{array}{r} lg\ 15 = 1{,}1761 \\ \underline{lg\ 27 = 1{,}4314} \\ lg \cdot 15 + lg\ 27 = 2{,}6075 \end{array}$$

Die Logarithmentafel gibt tatsächlich nur die Werte 1761 und 4314 an. Daß davor eine 1 gesetzt wurde, geschah nach **folgender Regel:**

einstellige Zahlen sind 0,....
zweistellige Zahlen sind 1,....
dreistellige Zahlen sind 2,....

und andererseits auch

Nullstellige Zahlen sind 0,.... —1
0,0-stellige Zahlen sind 0,.... —2 usf.

Die Zahlen **vor dem Komma geben nur die Stellenzahl an und haben nichts mit dem Logarithmenwert zu tun.**

Also sucht man im Verfolg des Beispieles auch nur den zu 6075 gehörigen Wert in der Logarithmentafel auf. Man findet den Randwert (Numerus) zu

40500

und weiß, daß die Zahl, nach der obigen Regel dreistellig sein muß. Das Ergebnis lautet also:

405,

was übrigens auch eine übliche Rechnungsdurchführung in dem vorliegenden Falle leicht bestätigen kann.

67. Eine Division drückt sich logarithmisch als eine Subtraktion aus. Es ist:

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

Beispiel: $\frac{3640}{65}$, also logarithmisch

$$\lg\left(\frac{3640}{65}\right) = \lg 3640 - \lg 65.$$

Unter Berücksichtigung der in Ziffer 66 gegebenen Stellenregel findet man in der Logarithmentafel

$$\lg 3640 = 3{,}5611 \text{ (4 Stellen)}$$
$$\lg 65 = 1{,}8129 \text{ (2 Stellen)}$$
$$\lg 3640 - \lg 65 = 1{,}7482$$

zu der Zahl 7482 findet man den Randwert (Numerus) 560 und weiß, daß der Wert nach der Stellenregel zweistellig sein muß, also lautet:

56,0.

68. Potenz- und Wurzelrechnungen werden im logarithmischen Verfahren auf Multiplikationen bzw. Divisionen zurückgeführt.

Allgemein gilt:

$$\lg (a^n) = n \cdot \lg a$$

und

$$\lg \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \lg a$$

69. Beispiel zur logarithmischen Potenz- und Wurzelrechnung:

a) $21^3 = ?$

$$\lg (21^3) = 3 \cdot \lg 21.$$

Man findet in der Logarithmentafel (Stellenwert beachten):

$$\lg 21 = 1{,}3222,$$
$$3 \cdot \lg 21 = 3{,}9666$$

Der Randwert (Numerus) zu der Zahl (Mantisse) 9666 ergibt 92 und unter Berücksichtigung des Stellenwertes (4! Stellen)

b) $\sqrt[2]{74} = ?$

$$\lg\left(\sqrt[2]{74}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lg 74.$$

In der Logarithmentafel findet man

$$\lg 74 = 1{,}8692,$$
$$\tfrac{1}{2} \cdot \lg 74 = 0{,}9346.$$

Der Numerus zur Mantisse 9346 ist **rund** 860 und das Ergebnis unter Beachtung des Stellenwertes

8,60.

Anmerkung:

Zwischenwerte können in den Logarithmentafeln durch Zwischenrechnung (Interpolation) gefunden werden.

Im übrigen werden die Logarithmentafeln um so exakter, je mehr Stellen sie berücksichtigen. Im allgemeinen genügt die 5-stellige Logarithmentafel, da höhere Stellenzahlen (7, 9, 11) die Tafeln zu unhandlich machen.

c) $\frac{25^3}{72} \cdot \sqrt[4]{78} = ?$

Zunächst eine Vereinfachung:

$$\left(\frac{25^3 \cdot 78^{\frac{1}{4}}}{7^2}\right) =$$

$$\lg \frac{25^3 \cdot 78^{\frac{1}{4}}}{7^2} = 3 \lg 25 + \frac{1}{4} \lg 78 - 2 \lg 7.$$

Die Rechnung ergibt unter Beachtung des oben Gesagten:

$\lg 25 =$	1.3979	
$3 \lg 25 =$		4.1937
$\lg 78 =$	1.8921	
$^1/_4 \lg 78 =$		0.4730
$3 \lg 25 + {}^1/_4 \lg 78 =$		4.6667
$\lg 7 =$	0.8451	
$2 \lg 7 =$		1.6902
$3 \lg 25 + {}^1/_4 \lg 78 - 2 \lg 7 =$		2.9765

Zu der Mantisse 9758 findet sich der Numerus

946

entsprechend der Stellenregel.

Als wichtiges Merkmal erkennt man, daß die logarithmische Rechnung ohne Bestimmung eines Zwischenresultates durchgeführt werden kann.

Da ferner die Art der Exponenten beliebig ist, erklärt sich der außerordentliche Vorteil, den die logrithmische Rechnung mit sich bringt.

70. Schon unter Ziffer **3.** wurde darauf aufmerksam gemacht, daß man bestrebt sein wird, durch besondere Hilfsmittel die Rechnungsgänge zu erleichtern, was besonders dann von großer Bedeutung ist, wenn es sich um oft wiederholte Verfahren handelt, wie sie beispielsweise in der

Navigation,
Luftbildwesen,
Zieleinrichtungen

vorkommen.

Alle Hilfsmittel gehen auf **logarithmische Verfahren** zurück.

71. Das weit verbreitetste Rechengerät ist der **Rechenschieber.** Im Rechenschieber wird die Tatsache ausgenutzt, daß sich im logarithmischen Verfahren Multiplikation und Division auf eine Addition und Subtraktion zurückführen lassen.

Da sich Zahlenwerte in Strecken darstellen lassen (z. B. 1 cm ≡ 1 km) kann man eine Multiplikation durchführen, z. B. von $2 \cdot 3$, indem man nicht mehr den Zahlenwert 2 oder 3, auf der Skala aufträgt, sondern die Logarithmen der Zahlen. Also lg 2 und lg 3.

Legt man die Strecken lg 2 und lg 3 aneinander, so erhält man

$$\lg 2 + \lg 3 = \lg 6,$$

was einer Multiplikation entspricht.

Auf den Skalen schreibt man nicht die Werte lg 2, lg 3, lg 6 und so fort an, denn diese sind ohne Belang, sondern deren Numerus also 2, 3, 6 usf.

72. **Da die Anlage von logarithmischen Teilungen** sehr häufig notwendig wird, um einfache rechnerische Beziehungen zu finden, wird in den folgenden Ziffern deren Durchführung behandelt.

73. Wie aus der Logarithmentafel und der Stellenregel (Ziffer 66) hervorgeht, ist:

$$\lg 1 = 0,$$
$$\lg 10 = 1,$$
$$\lg 100 = 2 \text{ usf.}$$

Das zwischen 0 und 1, 1 und 2 usf. liegende Stück nennt man einen **Teilungsschritt.**

Die Größe des Teilungsschrittes ist beliebig. Man kann 1 cm, 1 m und 1 km usf. wählen.

Je größer der Teilungsschritt ist, um so exakter kann die Unterteilung vorgenommen werden, um so unhandlicher wird aber auch die Verwendung.

74. Gebräuchliche *Teilungsschritte* sind:

100 mm bei käuflichem Papier
mit logarithmischer Teilung,
125 mm kleine Rechenschieberteilung,
250 mm große Rechenschieberteilung,
500 mm große Rechenschieberteilung.

75. Der Teilungsschritt wird mit den Zahlen 1...10 unterteilt. Die Unterteilung erfolgt logarithmisch, d. h. es sind die Logarithmenwerte im Teilungsmaßstab aufzutragen.

Beispiel: (ohne Zwischenwerte).

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

log. Teilung

Log. Wert	aufzutragen 50	100	125	250	Teilungsschritt
lg 1 = 0	0	0	0	0	
lg 2 = 0,3010	15,05	30,1	37,6	75,2	mm
lg 3 = 0,4771	23,85	47,71	59,6	119,2	
lg 4 = 0,6020	30,10	60,20	75,3	150,6	
lg 5 = 0,6990	34,9	69,9	87,4	174,9	
lg 6 = 0,7782	38,91	77,82	97,3	194,6	
lg 7 = 0,8451	42,25	84,51	106,0	212,0	
lg 8 = 0,9031	45,15	90,31	113,0	226,0	
lg 9 = 0,9542	47,71	95,42	119,0	238,0	
lg 10 = 1	50	100	125	250	

76. Logarithmische Teilungen werden benutzt beim Rechenschieber und bei den Rechentafeln (Nomogrammen).

Während der Rechenschieber verschiedenartige Rechenaufgaben, die auf Multiplikationen, Divisionen, Potenzen und Wurzelrechnungen beruhen, gestattet, sind Rechentafeln stets nur auf einen mathematischen Ausdruck abgestellt.

Der Rechenschieber erfordert also die Kenntnis der „**Formel**", die Rechentafel jedoch nicht. Dafür ist für jede Formel eine besondere Rechentafel nötig.

77. Der **logarithmische Rechenschieber** besteht aus 2 Skalen mit logarithmischer Teilung, beliebigen aber gleichen Maßstabes. Die beiden Teilungen sind zueinander verschiebbar. Man kann also Strecken durch Verschieben addieren und subtrahieren und erhält so Multiplikation und Division (Bild a).

Bild a

Für Potenz und Wurzelrechnungen sind besondere Skalen vorgesehen, deren Bedeutung und Anwendung aus den den Rechenschiebern beigegebenen Gebrauchsanweisungen zu ersehen sind.

Zur Errechnung des Produktes 2 · 3 stellt man die Zungenteilung mit dem Anfangsstrich (1) auf die Zahl 2 der Schieberteilung und liest bei der Zahl 3 der Zungenteilung das Resultat 6 auf der Schieberteilung ab (Bild b).

Einstellung
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 untere Zungenteilung
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
ablesen!

Bild b

78. In der gleichen Weise kann man ohne weitere Verstellung der Zungenteilung die Ergebnisse 2 · 2, 2 · 3, 2 · 4, 2 · 5 (und je nach Auftragung deren Zwischenwerte) ablesen, woraus der Wert des Rechenschiebers für Tabellenrechnungen erhellt.

79. An Stelle des im Beispiel genannten Wertpaares 2 · 3 hätte man auch wählen können 20 · 30 oder 0,2 · 0,3 oder 2 · 30 usf. Im Ergebnis tritt stets die Zahl 6 auf, deren Kommastelle jedoch verschieden ist, nämlich: 6, 600, 0,06, 60 usf.

Welche Kommastelle in Frage kommt, kann man entweder durch überschlägige Rechnung schätzen oder aber, man bestimmt sie durch einfache Stellenregel.

80. Werden die im Beispiel genannten Faktorenwerte auf 2 · 6, 2 · 7, 2 · 8 usf. erhöht, so muß man den Endstrich der Zungenteilung auf die Zahl 2 der Schieberteilung einstellen und die zu den Zahlen 6, 7, 8 usf. der Zungenteilung gehörigen Zahlen auf der linken Seite der Schieberteilung ablesen.

81. Stellenregel für Multiplikation:

1. Zungenteilung nach rechts verschoben.

Die Stellenzahl des Ergebnisses ist gleich der um eins verminderten Summe der Stellenzahlen der einzelnen Faktoren.

Anmerkung:

Unter Stellenzahl versteht man stets die Zahl der Stellen vor dem Komma. Nullstellen hinter dem Komma zählen stets als —1 Stelle je Null.

Also:

1000,000 = 4 Stellen,
100,000 = 3 Stellen,
10,000 = 2 Stellen,
1,000 = 1 Stelle,
0,100 = 0 Stellen,
0,010 = — 1 Stelle,
0,001 = — 2 Stellen,
usf.

2. Zungenstellung nach links verschoben.

Die Stellenzahl des Ergebnisses ist gleich der Summe der Stellenzahl der einzelnen Faktoren.

Beispiel:

Beispiel	Zungenstellung		Stellenzahl
2 · 3	Zungenstellung rechts	1+1−1	1 Stelle
2 · 15	Zungenstellung rechts	1+2−1	2 Stellen
0,3 · 15	Zungenstellung rechts	0+2−1	1 Stelle
0,8 · 0,004	Zungenstellung links	0+(−1)	−1 Stelle
15 · 32	Zungenstellung rechts	2+2−1=	3 Stellen
5,2 · 48	Zungenstellung links	1+1	2 Stellen
39 · 4	Zungenstellung links	2+1	3 Stellen
2 · 0,023	Zungenstellung rechts	1+(−1)−1	−1 Stelle

82. Nach der Stellenregel können auch zusammenhängende Ausdrücke wie etwa

$$5{,}2 \cdot 327 \cdot 0{,}2 \cdot 45$$

der Stellenzahl nach bestimmt werden.

Man bestimmt die gesamte Stellenzahl und zieht immer dann eine Stelle ab, wenn die Zungenstellung nach rechts zeigt:

Beispiel:

Die Stellenzahl von

$$5{,}2 \cdot 327 \cdot 0{,}2 \cdot 45$$

wäre $1 + 3 + 0 + 2 = 6$ Stellen.

Bei der Ausrechnung zeigt die Schieberzunge einmal nach rechts, wofür ein —1 gebucht wird, so daß sich die endgültige Stellenzahl 6 — 1 = 5 ergibt.

83. In der gleichen Weise wird die Division durch Subtraktion von Strecken dargestellt.

In der beistehenden Zeichnung ist als Beispiel die Division 6 : 2 = 3 auszuführen. Von der logrithmischen Strecke 6 wird die logarithmische Strecke 2 abgezogen, d. h., man stellt jetzt die Zahl 2 der Zungenteilung auf die Zahl 6 der Schieberteilung ein und liest beim Anfangsstrich (1) der Zungenteilung auf der Schieberteilung die Zahl 3 ab.

Auch hier wird man je nach dem Ergebnis einmal eine Zungenstellung rechts und einmal eine Zungenstellung links haben.

Beispiel: 20 : 5 = 4 ergibt Zungenstellung links (Zeichnung).

84. **Stellenregel für Division. Die Stellenzahl eines Quotienten erhält man durch Subtraktion der Stellenzahlen des Nenners von denen des Zählers.**

Dabei merke man:

Bei Zungenstellung rechts ist eine Stelle zuzuzählen!

Beispiele:

Beispiel	Zungenstellung	Stellen	Stellenzahl
8 : 2	Zungenstellung rechts	1—1+1	1 Stelle
45 : 3	Zungenstellung rechts	2—1+1	2 Stellen
3 : 66	„ links	1—2	—1 Stelle
0,8 : 0,2	Zungenstellung rechts	0—0+1	1 Stelle
25 : 5	„ links	2—1	1 Stelle

85. Es können auch aus Multiplikation und Division **zusammengesetzte Ausdrücke** gleichzeitig errechnet werden.

Es werden zunächst grundsätzlich alle Stellen erfaßt und dann **bei jeder Zungenstellung nach rechts bei Multiplikation eine Stelle abgezogen, bei Division eine Stelle zugezählt.**

Beispiel: $\dfrac{5{,}7 \cdot 380 \cdot 0{,}02 \cdot 13}{1{,}2 \cdot 44 \cdot 0{,}3}$

Grundstellenzahl: $1 + 3 + (-1) + 2 / -1 - 2 - 0 = 2$

Während der Rechnung ergaben sich:

bei der *Multiplikation* 2 Zungenstellungen *rechts*, also — 2 Stellen,

bei der *Division* 2 Zungenstellungen *rechts*, also + 2 Stellen.

Die endgültige Stellenzahl ist also $2 - 2 + 2 = 2$ **Stellen.**

86. Rechenschieber besitzen im allgemeinen **2 Schieber- und 2 Zungenteilungen.** Die *oberen Teilungen* haben stets den *halben Teilungsschritt* gegenüber den unteren Teilungen.

Hierdurch zeigen die oberen Teilungen stets die **Quadratzahl** zu den unteren an.

Um die beiden Teilungen miteinander in Verbindung bringen zu können, benutzt man den auf dem Schieber verschiebbaren **Läufer,** dessen Indexstrich auf der oberen Teilung stets das *Quadrat* der auf der unteren Schieberteilung angesetzten Zahl angiebt, oder aber den *Wurzelwert* der oberen Schieberteilungen auf der unteren anzeigt. (Bild).

Läufer

obere Schieberteilung

3 4 5 6 7 8 9

2 3

untere Schieberteilung

87. Außer den erwähnten Teilungen besitzen moderne Rechenschieber auch noch solche für Kubikzahlen, für beliebige Potenzen oder aber Teilungen für die Angabe besonderer Sonderwerte, wie etwa zur Errechnung von Stöchiometrischen Aufgaben (Chemie), von ballistischen Kurven und anderes mehr.

88. Wie bereits erwähnt, erfordert der Rechenschieber die genaue Kenntnis der mathematischen Zusammenhänge. Er gestattet dafür, in universaler Form **alle Zusammenhänge** zu lösen, solange sie nicht additiver Art sind.

Im Gegensatz hierzu lösen **Rechentafeln** stets nur **einen** mathematischen Ausdruck, der jedoch dem Rechner nicht mehr bekannt sein muß.

89. Die Rechentafeln beruhen in ihrem Aufbau ebenfalls auf logarithmischen Teilungen, wobei diese jedoch in festem Abstand voneinander aufgezeichnet sind.

Es würde zu weit führen, sollte in dem vorliegenden Rahmen der Aufbau und die Entwicklung einer Rechentafel gezeigt werden. Es genügt, an einigen Beispielen, den **Verwendungszweck der Tafeln** zu zeigen.

90. Verwendungsbeispiele für Rechentafeln.

$$s = v \cdot t$$

Beispiele: 1. $v = 30\,\text{m/sec}$, $t = 3\,\text{sec}$
ablesen: $\underline{s = 90\,\text{m}}$

2. $s = 40\,\text{m}$, $t = 8\,\text{sec}$
ablesen: $\underline{v = 5\,\text{m/sec}}$

3. $v = 4\,\text{m/sec}$, $s = 20\,\text{m}$
ablesen: $\underline{t = 5\,\text{sec}}$

$$Md = 716{,}2 \cdot \frac{N}{n} \text{ mkg}$$

Beispiele: 1. Md = 2 mkg, n = 300/min
ablesen: <u>N = 0,85 PS</u>

2. N = 4 PS, n = 500/min
ablesen: <u>Md = 6 mkg</u>

91. Die in Ziffer **72—90** dargestellten Hilfsmittel geben die Lösungen von Rechnungsaufgaben oder aber **die Zusammenhänge von Rechnungsgrößen** wieder.

Solche Zusammenhänge nennt man auch **„Funktionen."**

Beispiel:

Weg ist = Geschwindigkeit · Zeit
oder in mathematischer Form

$$s = v \cdot t.$$

Da rechts und links des Gleichheitszeichens gleiche Wertinhalte stehen, nennt man den Ausdruck auch **Gleichung.**

92. Nicht immer treten diese „Gleichungen" in der einfachen und offenen Form auf.

Aber immer sind die Gleichungen der mathematische Ausdruck einer logischen Überlegung oder einer experimentellen Erfahrung.

Anmerkung:

Im letzten Falle nennt man sie auch oft „empirische Gleichungen", deren robusteste Form, die Faustformel ist, die nur in roher Annäherung die Zusammenhänge wiedergibt.

Beispiel:

Ein Flugzeug fliegt auf der Strecke 9 von Berlin nach München ab 8 Uhr, mit der Geschwindigkeit 250 km je Stunde. Ein zweites Flugzeug startet um 9 Uhr, um mit einer Geschwindigkeit von 400 km je Stunde das erste Flugzeug einzuholen. Wann und wo werden sich die beiden Flugzeuge treffen?

Die Aufgabe führt zu folgenden Überlegungen:

a) Das erste und das zweite Flugzeug haben im Treffpunkt **den gleichen Weg von Berlin aus** zurückgelegt.

b) Der **Weg** des **ersten** Flugzeuges ist **Geschwindigkeit · Zeit,** oder, da die Geschwindigkeit von 250 km je Stunde bekannt ist,

250 · Zeit (Zeit in Stunden)

c) Der **Weg** des zweiten **Flugzeuges** ist nach a) der gleiche, die Zeit aber eine Stunde kürzer. Sein Weg ist also

Geschwindigkeit · (Zeit — 1 Stunde)

oder, da die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeuges mit 400 km je Stunde bekannt war,

400 · (Zeit — 1 Stunde).

d) Nach a) ist also gleichzusetzen,

$$250 \cdot \text{Zeit} = 400 \cdot (\text{Zeit} - 1 \text{ Stunde}).$$

Diese Überlegung kann man in eine Formel kleiden, indem man bezeichnet:

v_1 = Geschwindigkeit des ersten Flugzeuges,
v_2 = Geschwindigkeit des zweiten Flugzeuges.
t = Zeit in Stunden,
s = zurückgelegter Weg.

Es ist also: $s = v_1 \cdot t$ und
$s = v_2 \cdot (t - 1)$.

Da beide Ausdrücke gleich sind, kann man auch schreiben:

$$v_1 \cdot t = v_2 \cdot (t - 1),$$

oder mit den bekannten Werten

$$250\,t = 400 \cdot (t - 1),$$

oder: $\mathbf{250\,t = 400\,t - 400.}$

92a. Bei der Lösung einer Gleichung ist zu beachten, daß an dem Wertinhalte der Gleichung nichts geändert wird, wenn man **auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleichen Rechnungsoperationen** (also Division, Multiplikation, Addition usf.) **vornimmt.**

In Verfolg des gerechneten Beispieles kann man also verfahren:

$$250\,t = 400\,t - 400,$$

oder:

$$250\,t - 400\,t = 400\,t - 400\,t - 400$$
$$-150\,t = -400$$
$$(-1) \cdot -150\,t = -400 \cdot (-1)$$
$$150\,t = 400$$
$$\frac{150\,t}{150} = \frac{400}{150}$$

oder: $\mathbf{t = 2{,}66}$ **Stunden,**

d. h. das zweite Flugzeug wird das erste Flugzeug nach 2,66 Stunden erreichen.

93. In manchen Fällen, besonders bei erfahrungsgemäß gewonnenen **Funktionen,** ist es zweckmäßiger, diese in Form einer Kurve **zeichnerisch** (graphisch) **darzustellen.**

Beispiel:

Der Widerstand eines Flugzeuges wächst mit der Geschwindigkeit, und zwar nach einer erfahrungsgemäß gewonnenen Gleichung, welche lautet:

$$W = c \cdot V^2.$$

Widerstand Kg
300
200 = Höchste Zugkraft
100
geschwindigkeit v — Km/st.
100
200
300
400

Zeichnerische Darstellung der Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Widerstand

$W = c \cdot V^2$; $W = 0{,}0022 \cdot V^2$

Hierin bedeuten:

W = Widerstand in kg.

V = Geschwindigkeit in km pro Stunde.

c = Flächenbeiwert, der von der Oberfläche und Beschaffenheit des Flügels abhängig ist und bei dem vorliegenden Versuche zu c = 0,0022 gefunden wurde.

Um die graphische Darstellung zu erhalten, sucht man zu den verschiedenen Geschwindigkeiten die zugehörigen Widerstände auf und stellt sie in einer Tabelle zusammen.

V	V^2	W
0	0	0
50	2 500	5,5
100	10 000	22
150	22 500	50
200	40 000	84,5
250	51 225	193
300	90 000	200
350	122 000	270
400	160 000	355

Die Werte von V und W werden auf zwei senkrecht zueinander stehenden Achsen (rechtwinkliges Koordinatensystem) aufgetragen und ergeben eine in der Zeichnung dargestellte Kurve.

Die Kurvendarstellung hat den Vorteil, daß alle Zwischenwerte abgelesen werden können.

Aus der Darstellung erkennt man z. B., daß zur Geschwindigkeit V = 300 km pro Stunde der Widerstand W = 200 kg gehört. D. h. der Motor muß mindestens diese Zugkraft aufbringen, um die verlangte Geschwindigkeit zu erzielen.

B. Berechnung und zeichnerische Bestimmung von Flächen.

(Planimetrie und Geometrie.)

94. Rechnung und Zeichnung sind selten voneinander zu trennen. Die Rechnung führt in die abstrakten Zusammenhänge ein, während die Zeichung oder genauer die **Messung vermittels der Zeichnung** und die **Bestimmung der zeichnerischen Zusammenhänge** die Vorstellung belebt.

95. Zeichnerische Messungen und Rechnungen in der Ebene nennt man

ebene Geometrie.

Zeichnerische Messungen und Berechnungen, die auf einer Kugeloberfläche vorgenommen werden, fallen in das Gebiet der

sphärischen Geometrie.

Da die Erde als Kugel anzusprechen ist, werden alle Rechnungen, die sich auf größere Entfernungen erstrecken (Nautik), nach den Regeln der sphärischen Geometrie zu behandeln sein.

96. Die Beziehungen zwischen ebener Geometrie und Mathematik werden in der

Trigonometrie

dargestellt.

97. Die Beziehungen zwischen sphärischer Geometrie und Mathematik finden ihren Niederschlag in der

Stereometrie.

98. Die Planimetrie gibt die einfachsten, verstandesgemäß sofort einleuchtenden Begriffe wieder.

Zeichnerische **Grundbegriffe:**

a) Der **Punkt** ist eine gedachte Stelle, er hat keine Ausdehnung.

b) Die **Linie** entsteht durch Wanderung des Punktes, sie hat nur eine Ausdehnung, nämlich die Länge.

Linie Gerade Strahl Strecke

c) Behält der Punkt bei seiner Wanderung die Richtung bei, so nennt man die zurückgelegte Linie eine **Gerade.**

d) Geht die Wanderung von einem Punkte geradeaus, so nennt man die Gerade einen **Strahl.**

e) Ist dagegen die von einem Punkte ausgehende Wanderung von einem zweiten Punkte begrenzt, so nennt man das Stück der Geraden eine **Strecke.**

99. Die Elemente: Punkt, Linie, Gerade, Strahl, Strecke umschließen das ganze Gebiet der Flächenberechnung und deren Zeichnung und Bestimmung.

100. Die Elemente können zueinander folgende Beziehung haben:

a) Zwei Gerade schneiden sich. Sie bilden Winkel miteinander. Man bezeichnet sie mit den griechischen Buchstaben α, β, γ, δ usf.

b) Zwei Gerade haben immer den gleichen Abstand, d. h. sie laufen parallel. Man sagt, sie schneiden sich erst im Unendlichen (∞).

c) **Zwei sich schneidende oder zwei parallele Geraden bestimmen eine Ebene.**

d) Hat eine Linie von einem Punkte aus immer den gleichen Abstand, so beschreibt sie einen **Kreis.**

Anmerkung:

Man kann die Gerade als einen Kreis auffassen, dessen Halbmesser unendlich groß ist.

101. Einige zeichnerische **Kunstgriffe:**

a) **Von einem Punkt auf eine Gerade ein Lot fällen:**

P

P

B

Von P beliebigen Kreisbogen nach A und B schlagen.

P

A B

Von A und B aus beliebige, aber gleich große Kreisbogen in S zum Schnitt bringen. P mit S verbinden.

S

b) **Strecke halbieren:**

Von A und B aus beliebige, aber gleich große Kreisbogen schlagen und über und unter der Strecke zum Schnitt bringen. Schnittpunkte verbinden.

A B

c) **Durch einen Punkt eine Parallele zur gegebenen Geraden legen:**

Zunächst wie unter a) verfahren, dann BC = AB machen. Von B und C mit PB = r Kreisbogen schlagen. Schnittpunkt S mit P verbinden.

$\overline{BC} = \overline{AB}$

d) **In einem Punkt einer Geraden eine Senkrechte errichten:**

Von P aus einen beliebigen Kreisbogen nach A′ und B′ schlagen. Dann nach b) verfahren.

e) **An einem Kreis im Punkte P eine Berührungsgerade (Tangente) legen:**

1. Durch P einen Durchmesser legen. Auf M ein Lot nach d) errichten.
2. Durch P nach c) eine Parallele legen.

f) **Einen gegebenen Winkel auf eine Gerade im Punkte A übertragen:**

Nach Abbildung verfahren!

g) **Winkel halbieren.**

Beliebigen Kreisbogen um A nach B und C schlagen. Von B und C beliebigen, aber gleich großen Kreis in S zum Schnitt bringen. S mit A verbinden.

h) **Strecke in gleiche Teile teilen:**

Unter beliebigem Winkel Gerade antragen. Auf dieser die Anzahl der gewünschten Teile in beliebigem Maßstab auftragen. Vom letzten Punkt aus nach dem Endpunkt der zu teilenden Strecke eine Gerade und zu dieser durch die Teilpunkte Parallele ziehen.

A B gegeben

A B

102. Jeder Kreis wird in 360° (Grad) eingeteilt, jeder Grad in 60′ (Bogenminute) und jede Bogenminute in 60″ (Bogensekunde).

Anmerkung:

Zur Überführung der Rechnung in Dezimalrechnung werden heute Instrumente mit einer Teilung von 400° versehen. Für die Belange der Luftwaffe ist dieser Teilungsvorgang ohne Bedeutung.

103. Einen Winkel von 90° nennt man einen **„rechten Winkel".** Die Schenkel eines rechten Winkels stehen somit senkrecht aufeinander.

90 45° 90° 180 0 360 r 270

104. Ist r der Halbmesser (Radius) eines Kreises, so ist sein **Umfang** $2 r \pi$ oder wenn man $r = 1$ macht, 2π. π ist dabei die **Kreiskonstante** und hat den Wert: $\pi = 3{,}1425 \ldots$

Im Einheitskreis mit dem Radius $r = 1$ entsprechen also:

dem **Winkel**	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
der **Bogen**	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π

105. Beim Abstecken eines Gebäudes wird ein rechter Winkel gebraucht.

Man zimmert sich dazu aus Lattenstücken, denen man von Nageleinschlag zu Nageleinschlag die Längen 3, 4, 5 m gegeben hat, ein Dreieck.

Anmerkung:

Diese Tatsache beruht auf dem **„pythagoräischen Lehrsatz“**, demzufolge

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

oder in allgemeinen Worten: **im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den kleinen Seiten (Katheten) gleich dem Quadrat über der großen Seite (Hypotenuse).**

106. Die Gradeinteilung findet sich auf der **Kompaßrose** wieder. Nach ihr wird der Kurs abgesetzt.

Ist durch Seitenwind mit einer „Kursversetzung“ zu rechnen, so muß durch Gegenruder ein anderer Kurs angelegt werden.

107. Um die Kursversetzung bestimmen zu können, benutzt man die **Zeichnung als Rechnung**, indem man den Längen der angetragenen Geraden eine besondere zahlenmäßige Bedeutung beilegt.

v

Beispiel:

In der Zeichnung ist durch den Pfeil die **Flugrichtung** des Flugzeuges angegeben. Über die **Größe der Geschwindigkeit** gibt die Länge der Strecke, auf der der Pfeil angegeben wird, Aufschluß.

108. Um über die Größe einen Anhalt zu gewinnen, wählt man einen **Maßstab.**

Beispiel:

1 cm ≘ 50 km pro Stunde,
1 mm ≘ 1 kg usf.

Anmerkung:

Das ≘-Zeichen soll sagen: „Es bedeutet“, denn 1 cm kann niemals 50 km pro Stunde sein.

Auf diese Weise kann man Kräfte, Geschwindigkeiten, Zeiten, Beschleunigungen, Spannungen, Stromstärken usf. in Form von Strecken darstellen.

109. Zeichnerisch dargestellte Rechnungsgrößen kann man addieren und subtrahieren.

Im Gegensatz zur algebraischen Addition und Subtraktion nennt man diese im vorliegenden Falle zeichnerische oder graphische Addition oder Subtraktion.

Algebraische Verfahren stellt man dar mit dem bekannten Zeichen

$$a + b \text{ bzw. } a - b.$$

Graphische Verfahren erhalten im Gegensatz hierzu die Zeichen

a +➤ b bzw. a —➤ b

(Sprich: a graphisch plus b bzw. graphisch minus b.)

Man will dabei zum Ausdruck bringen, daß die Größen, mit denen man rechnet, **nicht nur einen Zahlenwert,** sondern **auch einen Richtungswert** haben.

110. (Vgl. auch **106.**)

Die Durchführung einer **zeichnerischen Addition** zeigt folgendes

Beispiel:

Ein Flugzeug fliegt mit dem Kurs $\alpha°$ von A nach B. Da die Strecke AB und die Geschwindigkeit bekannt sind, kann man die Zeit errechnen, die das Flugzeug für die Zurücklegung der Strecke benötigt, (**Bild 1**). Der in **Bild 2** in der eingezeichneten Richtung einfallende Wind wird das Flugzeug nach Backbord versetzen und gleichzeitig seine Geschwindigkeit, da er von schräg vorwärts weht, vermindern.

Bild 1

Bild 2

Die Frage lautet:

a) Mit welchem Kurs muß das Flugzeug tatsächlich fliegen, um von A nach B zu kommen?

b) Welche Geschwindigkeit wird das Flugzeug auf dem neuen Kurs haben?

Gegeben sei: v_f = 250 km pro Stunde = 70 m pro Sekunde (Geschwindigkeit des Flugzeuges). v_w = 60 km pro Stunde = 16,7 m pro Sekunde (Geschwindigkeit des Windes).

Gewählter Maßstab, 1 mm ≡ 5 mm pro Stunde, also sind

250 km pro Stunde ≡ 50 mm,
60 km pro Stunde ≡ 12 mm.

D. h. ohne Gegenwind wäre das Flugzeug in 1 Stunde nach C gekommen (**Bild 3**).

Bild 3

Der Wind allein würde aber das Flugzeug von C aus nach D versetzen.

Unter der Zusammenwirkung von Fluggeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit wird also nicht der Weg AC sondern AD zurückgelegt.

Statt des Kurses $\alpha°$ ist das Flugzeug den Kurs $(\alpha - \beta)°$ geflogen, d. h. es hat eine Kursversetzung von $\beta°$ erfahren, obwohl die Kompaßrose im Führersitz dauernd $\alpha°$ anzeigte.

Damit das Flugzeug tatsächlich nach B gelangt, muß es also nicht den Kurs $\alpha°$ sondern einen solchen $(\alpha + \beta)°$ anliegen lassen. (**Bild 4**).

Das Flugzeug hat auch nicht die Geschwindigkeit, die der Strecke A...C entspricht, erreicht, sondern nur eine solche, entsprechend der Strecke A...D.

Diese ist, wie man abmessen kann, 43 mm lang, was nach dem gewählten Maßstab eine Geschwindigkeit von 215 km ergibt.

Bild 4

Ist die Entfernung von A nach B 780 km groß, so werden zu ihrer Bewältigung nicht 3,12 Stunden sondern 3,63 Stunden benötigt, was hinsichtlich des zu erwartenden Kraftstoffverbrauchs von Bedeutung sein kann.

111. Wie man sieht, kann man auf zeichnerische Art in einfacher Weise solche Aufgaben lösen, bei denen Zahlengrößen **und** Richtungsgrößen auftreten.

Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt natürlich von der Exaktheit der Zeichnung und deren Maßstab ab. Für fast alle praktischen Zwecke jedoch genügt das Verfahren, ist sogar oft das einzig mögliche.

112. In anderen Fällen wird es nötig sein, die einzelnen Größen zu berechnen. Die Verfahren kennzeichnet man mit

Trigonometrie.

Die Trigonometrie errechnet aus bekannten Winkeln und Strecken die noch fehlenden Winkel und Seiten eines Dreiecks. (Dreieckrechnung).

113. Bei trigonometrischer Flächenberechnung zerlegt man daher die Flächen in Dreiecke und berechnet diese einzeln.

Beispiel:

Sind verschiedene Auflösungsmöglichkeiten vorhanden, so wird man stets die dem augenblicklichen Zwecke am nächsten liegende verwenden.

114. Bei der Dreieckrechnung hat man sich als **Grundsatz** zu merken:

Die Summe aller Innenwinkel eines Dreiecks ist 180° oder π.

Sind also zwei Winkel bekannt, so kann der dritte bestimmt werden.

Ein Sonderfall stellt das **rechtwinklige Dreieck** dar, bei dem **ein** Winkel „ein Rechter" ist.

Es genügt also die Angabe eines Winkels, um den fehlenden zu finden. (Bild).

Der einfachen Bestimmung wegen wird man daher anstreben, jede Dreiecksberechnung auf rechtwinklige Dreiecke zurückzuführen.

Im gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich. Die Winkel sind ebenfalls gleich und 60°.

115. Die Zusammenhänge zwischen Winkel und Dreieckseiten im rechtwinkligen Dreieck sind in den **trigonometrischen Funktionen** wiedergegeben.

In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die kurzen Seiten mit Katheten und die langen Seiten mit Hypotenuse (Bild, Ziffer 114).

Im Einheitskreis erhält man solche rechtwinkligen Dreiecke für jeden beliebigen Winkel α. Dort bezeichnet man aber die Seiten nicht mit Kathete und Hypotenuse, sondern, wie die Abbildung zeigt, mit

Sinus (sin),
Cosinus (cos),
Tangens (tg),
Cotangens (ctg).

116. Für jeden Winkel α erhält man, da der Halbmesser = 1, einen zugehörigen Wert von sin, cos, tg, ctg.

Diese Werte sind **in einer Tafel** zusammengetragen, vgl. Anh. 2.

Zwischen je einem rechten Winkel, also zwischen 0° und 90°, 90° und 180°, 180° und 270°, 270° und 360° wiederholen sich die Werte der trigonometrischen Funktionen. Trägt man rechts und aufwärts **positive** und links und abwärts **negative** Werte auf, so erhält man

	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	–1	0
cos	+1	0	–1	0	+1
tg	0	+∞	0	–∞	0
ctg	∞	0	∞	0	∞

117. Da der Umfang des Einheitskreises $2\pi = 360^\circ$ ist, kann man zu jedem **Bogenmaß** das zugehörige **Gradmaß** finden.

Es ist $$a_{\text{Bogen}} = \frac{2\pi}{360} \cdot a^\circ.$$

118. Einige trigonometrische Funktionen:

a)

	$90 - a$	$90 + a$	$180 - \alpha$	$130 + \alpha$
sin . . .	$\cos a$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
cos . . .	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
tg . . .	$\operatorname{ctg} a$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg . . .	$\operatorname{tg} a$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Beispiele:

$$\sin(180-30) = \sin 120 = \sin 60,$$
$$\cos(90-30) = \cos 60 = \sin 30,$$

usf.

b)

$\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a}$	$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a}$
$\operatorname{tg} a = \dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\operatorname{tg} a = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$
$\operatorname{ctg} a = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}$
$\sin a = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\sin \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\cos \alpha = \dfrac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}}$
$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$

ferner $$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

c) Funktionen von Summen und Differenzen von Winkeln.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(a \pm \beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \mp \operatorname{ctg}\alpha}.$$

119. Die **Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten** im rechtwinkligen Dreieck ergeben sich im Einheitskreis

Hypothenuse c, Gegenkathete a, Ankathete b, α

1. $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$

2. $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$

3. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$

4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$

Mit diesen vier Begriffen kommt man bei den meisten Dreieckberechnungen durch, vorausgesetzt, daß man sie auf rechtwinklige Dreiecke zurückführen kann.

120. Beispiele für Dreiecksrechnung.

a) Vom Punkt A aus ist die Entfernung des Gebäudes K zu bestimmen. Dazu benötigt man eine Visierplatte und ein Meßband. Das Ziel selbst ist nicht zugänglich. Man richtet die Visierplatte auf einen markanten Punkt des Gebäudes ein, (z. B. Turmspitze) und schlägt sie dann um einen rechten Winkel nach rechts oder links (hier rechts). Längs der neuen Visierlinie, die man durch eingesteckte Stäbe kennzeichnet, mißt man eine Basis von z. B. 100 m nach B ab. Baut man nun die Visierplatte bei B auf und visiert man von da aus zunächst A und dann H an, so kann man auf der Visierplatte den Winkel (z. B. 70°) ablesen.

Dann ist die Aufgabe nach Ziffer **119/3** gelöst. Es ist $e/b = tg\,\alpha$ oder die gesuchte Entfernung

$$e = b \cdot tg\,\alpha.$$

Da $b = 100$ m und aus der Funktionstafel $tg\,\alpha = tg\,70° = 2{,}74$ bekannt ist,

$$e = 100 \cdot 2{,}74 = \mathbf{274\ m}.$$

b) Man hätte die Lösung auch zeichnerisch finden können. Man zeichnet dazu die Basis 100 m in irgendeinem Maßstab, z. B. 1 cm ≡ 20 m auf. Im Punkt A zeichnet man einen „rechten Winkel" und trägt im Punkt B, vermittels eines Winkelmessers den Winkel von 70° an. Der Schnittpunkt mit der Senkrechten im Punkt A (K) liegt in der Entfernung von 13,7 cm von A. Nach dem gewählten Maßstab würde dies einer Strecke von **274 m** entsprechen.

Maßstab 2 : 3

e = 13,7 cm abmessen = 274 m

α = 70° antragen

b = 5cm
≡ 100m

c) Auf dem gezeigten Prinzip beruhen die in der Wehrmacht benutzten **Entfernungsmesser.** Die Basis ist dort verhältnismäßig klein (oft nur 1 m lang). Das Gerät ist so gebaut, daß durch Drehung eines Spiegels zwei Bilder des Zieles zur Deckung gebracht werden. Die Drehung des Spiegels entspricht der Winkeleinstellung der Visierplatte. Die Ablesung ergiebt keine Winkel, sondern direkt die Entfernung.

Je kleiner die Basis ist, um so ungenauer werden die Ergebnisse besonders beim Einschneiden größerer Entfernungen.

121. Die Verfahren der *ebenen Trigonometrie* haben absolute Richtigkeit nur für *kleine Entfernungen*.

Bei Messungen über große Strecken macht sich die Kugelgestalt der Erde bemerkbar. Die Seiten der Dreiecke sind tatsächlich keine Geraden mehr, sondern Kreisstücke, die auf einer Kugel aufliegend, deren Krümmungshalbmesser haben.

Wie bereits anfangs erwähnt, bezeichnet man das Rechenverfahren, daß diese Umstände berücksichtigt, mit

sphärischer Trigonometrie.

122. Zeichnerisch lassen sich die Aufgaben der sphärischen Trigonometrie nur durch *Auftragung* auf einer *Kugelfläche* lösen.

Es würde den Rahmen der vorliegenden Lehrblätter überschreiten, sollte im einzelnen auf die Gesetzmäßigkeiten der sphärischen Trigonometrie eingegangen werden.

Es sei nur auf zwei Kurvenarten hingewiesen, die in der navigatorischen Behandlung von Langstreckenflügen Bedeutung gewinnen können,

die **Loxodrome** und **Orthodrome.**

123. Fliegt ein Flugzeug zwischen Start und Ziel mit einem festen Kurs (z. B. 80°), so heißt das, daß das Flugzeug alle überflogenen Meridiane (Kreise für Süd- und Nordpol) unter dem gleichen Winkel schneidet. Es beschreibt dabei eine spiralförmige Kurve auf der Erdkugel, die man **Loxodrome** nennt.

Da in der üblichen Kartendarstellung die Meridiane als Parallele Geraden abgebildet sind (Mercator-Karten), stellt sich die Loxodrome als *Gerade* dar.

124. Die Loxodrome ist *nicht immer* die *kürzeste* Verbindung zwischen Start und Ziel. Kürzer ist ein Weg, der über

den größten Kreis führt. Dieser größte Kreis wird in einer Ebene abgebildet, die man so durch den Mittelpunkt der Erdkugel legt, daß in ihr die beiden Orte Start und Ziel liegen. Diese Kurve des größten Kreises nennt man **Orthodrome.**

125. Die Orthodrome schneidet die Meridiane nicht mehr im gleichen Winkel. Der Kurs des Flugzeuges muß dauernd geändert werden. Diese Schwierigkeit bedingt, daß man den Flug in der Loxodrome vorzieht, wenn nicht der orthodrome Flug ganz besondere Vorteile verspricht.

126. Besondere Vorteile bietet der orthodrome Flug nur bei sehr langen Strecken und bei Flügen in hohen Breiten.

127. Verläuft ein Flug längs des Äquators oder längs eines Meridianes, so wird die Orthodrome zur Loxodrome.

128. Ohne Rechnung werden im folgenden **einige Beispiele** zusammengestellt.

	Orte von ÷ bis	**Loxodrome** Seemeilen	**Orthodrome** Seemeilen	**Ersparnis**
1	San Franzisko — Jedo, Japan	4669	4446	223
2	Bermunda — Lizza	2873	2812	61
3	St. Thoman — Lissabon . .	3164	3131	33
4	Kap der guten Hoffnung — Kap Horn	3792	3590	202
5	Kap der guten Hoffnung — Hobartstown (Tasmanien)	6149	5384	765
6	Funchal — Bahia	3012	3011	1(!)
7	Kap Horn — Ostkap/Neuseeland	4740	4249	491
8	Kap Horn — Honululu . . .	6597	6477	120

Wie das Beispiel 6 zeigt, bringen Flüge, die den Äquator überqueren, im orthodromen Flug wenig Ersparnis.

129. Allgemeine Formeln zur Bestimmung des Inhaltes verschiedener Flächen.

Bild	Flächeninhalt = F	Schwergewichtslage = S
Dreieck.	$F = \frac{b \cdot h}{2}$	$\overline{AO} = \overline{OC}$ $\overline{SO} = \frac{1}{3}\, BO$ Schwerpunkt = Schnittpunkt der Mittellinien
Trapez.	$F = \frac{a + b}{2} \cdot h$	$\overline{SO} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{2b + a}{a + b}$ Oder zeichnerisch wie dargestellt
Halbkreis.	$F = \frac{\pi r^2}{2}$	$\overline{SO} = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}43\, r$
Ellipse.	$F = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4}$	Schnittpunkt der Achsen
Kreisausschnitt.	$F = \frac{b \cdot r}{2}$ $= \frac{\varphi}{360} \cdot \pi \cdot r^2$	$\overline{SO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b}$
Kreisabschnitt.	$F = \frac{r \cdot (b - s) + s \cdot h}{2}$	$\overline{SO} = \frac{s^3}{12\, F}$ F = Flächeninhalt

Beispiel:

Fläche des Halbkreises: $\frac{r^2 \pi}{2} = \frac{10^2 \cdot \pi}{2} = 157 \text{ cm}^2$

Fläche des Rechtecks: $b \cdot h = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

Fläche des Dreiecks: $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300 \text{ cm}^2$

gesamte Fläche $= 857 \text{ cm}^2$

130. In der Tabelle sind auch die Schwerpunktlagen einfacher Flächen angegeben. Bei der Bestimmung von Schwerpunkten zusammengesetzter flächenförmiger Körper (z. B. Blechplatten) geht man zweckmäßigerweise experimentell vor.

Beispiele:

Man hat den Schwerpunkt des in der Zeichnung dargestellten Abdeckbleches zu bestimmen. Dazu schneidet man sich die Form in starker Pappe und beliebigem Maßstab aus und hängt sie an

der frei gewählten Stelle 1, sich um eine Stecknadel drehend, gleichzeitig mit einem an einem dünnen Faden hängenden Gewicht auf. Die Linie des Lotes kann man dadurch feststellen,

daß man den mit Kohle eingeschwärzten Faden des Lotes gegen die Fläche pendeln läßt, wodurch auf dieser eine Gerade abgezeichnet wird.

Das gleiche wiederholt man mit der Aufhängung der Fläche an einen beliebigen Drehpunkt 2. Man erhält wiederum eine Lotgerade.

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt die Schwerpunktlage, wovon man sich überzeugen kann, wenn man versucht, in diesem Punkt die Fläche auf einer Nadelspitze ins Gleichgewicht zu bringen. Es werden nur wenige Lagenkorrekturen nötig sein.

C. Körperberechnung.

131. Allgemeine Formel zur Körperberechnung.

Bild	Mantelfläche = M Oberfläche = O	Rauminhalt = J
Zylinder.	$M = 2\pi r \cdot h$ $= \pi d \cdot h$	$J = r^2 \cdot \pi \cdot h$ $= \frac{d^2\pi}{4} \cdot h$
Prisma.	O = Umfang × Höhe + doppelte Grundfläche	J = Länge × Breite × Höhe
Pyramide.	O = Summe der begrenzenden Dreiecke + Grundfläche	$J = \frac{h}{3} \times$ **Grundfläche**
Hohlzylinder.	$M = 2\pi h \cdot (r + r_1)$	$J = \pi h \cdot (r^2 \cdot r_1^2)$
Schief abgeschnittener Zylinder.	$M = \pi \cdot r\,(h + h_1)$	$J = \pi r^2 \frac{h + h_1}{2}$

Bild	Mantelfläche = M Oberfläche = O	Rauminhalt = J
Kugel.	$O = 4\pi r^2 = \pi d^2$	$J = \frac{4}{3}\pi r^3$ $= \frac{\pi d^3}{6}$
Kugelausschnitt.	$O = \frac{\pi \cdot r}{2} \cdot (4h + s)$	$J = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$
Kugelabschnitt	$M = 2\pi r \cdot h =$ $\frac{\pi}{4} \cdot \left(s^2 + 4h^2\right)$	$J = \pi h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3}\right) =$ $= \pi \cdot h \cdot \left(\frac{s^2}{8} + \frac{h^2}{6}\right)$
Kegel.	$M = \pi \cdot r \cdot s$ $= \pi \cdot r \sqrt{r^2 + h^2}$	$J = \frac{h}{3} \cdot r^2 \pi$
Abgestumpfte Pyramide	O = Summe der begrenzenden Trapeze + obere + untere Grundfläche.	$J = \frac{h}{3} \cdot \left(F + f + \sqrt{F \cdot f}\right)$ f = obere, F = untere Grundfläche
Abgestumpfter Kegel.	$M = \pi s \cdot (r + r_1)$	$J = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1\right)$

Bild	Mantelfläche = M Oberfläche = O	Rauminhalt = J
Obelisk.	O = Summe der Trapeze + beide Endflächen	$J = \frac{h}{6} \cdot [2a+a_1) \cdot b + (2a_1+a) \cdot b_1] = \frac{h}{6}[a \cdot b + a_1 b_1 + (a+a_1) \cdot (b+b_1)]$
Kugelzone.	$M = 2 \pi r \cdot h$	$J = \frac{\pi h}{6} \cdot (3 a^2 + 3 b^2 + h^2)$
Keil.	O = Summe der beiden Trapeze (Rechtecke), der beiden Seitendreiecke und der rechteckigen Endfläche	$J = 2 (a + a_1) \cdot \frac{b h}{6}$
Ellipsoid.	Durch einfache Formel nicht ausdrückbar	$J = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi$

Oberfläche	Inhalt
Beispiel:	
Halbkugel	
$\frac{\pi d^2}{2} = \frac{\pi\, 30^2}{2} \quad = 1413\ cm^2$	$\frac{1}{2}\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi\, .\, 30^3}{12} \quad = 7061\ cm^3$
Zylinder	
$d \cdot \pi \cdot h =$ $30 \cdot 40 \cdot \pi \quad = 3768\ cm^2$	$\frac{\pi d^2}{4} \cdot h \quad = 28260\ cm^3$
abgestumpfter **Kegel**	
$M = \pi s (r + r_1) =$ *) $\pi \cdot 20{,}6 \cdot 25 \quad = 1620\ cm^2$	$\frac{\pi h^3}{3} \cdot (r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1) = 9922\ cm^3$
unter **Kreisgleiche**	
$\frac{20^2 \pi}{4} \quad = 314\ cm^2$	
insgesamt $\quad O = \mathbf{7115\ cm^2}$	$I = \mathbf{45243\ cm^3}$

*) $s = \sqrt{(r - r_1)^2 + h^2}$
$r = 15,\ r_1 = 10,\ h = 20$
$s = 20{,}6.$

132. Praktisch wird man bei der Körperberechnung vielfach mit dem *Versuch* auskommen.

Die *Inhalte von Kraftstoff-* und Schmierstoff*behältern* werden durch **Auslitern** bestimmt.

Den Inhalt *massiver Körper* kann man durch *Eintauchen* in Wasser und Bestimmung der **verdrängten Wassermenge** feststellen.

II. Teil.

Mechanische Grundbegriffe.

Einleitung.

1. Die mechanischen Gesetze stellen den Niederschlag von Beobachtungen dar, die es gestatten, vorausschauend aus Berechnungen, die Auswirkungen technischer Maßnahmen zu erkennen.

Diese Erkenntnisse finden ihre knappste Form in der mathematischen Formel. Daher müssen die mathematischen Grundbegriffe vorausgesetzt werden.

2. **Unter Mechanik versteht man die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Körper.**

3. Die **Lehre vom Gleichgewicht** nennt man **Statik.**

Die **Lehre von der Bewegung** nennt man **Dynamik.**

4. Der Zustand der Körper kann fest, flüssig oder luftförmig sein.

Feste Körper sind volumen- und formbeständig. Der innere Zusammenhalt ihrer kleinsten Teilchen (Kohäsion) ist sehr groß.

Flüssige Körper sind volumen-, aber nicht formbeständig. Ihre Kohäsion ist klein.

Luftförmige Körper sind weder volumen- noch formbeständig. Kohäsion ist nicht mehr vorhanden.

Je nach dem Zustand der behandelten Körper unterscheidet man:

- Mechanik der festen Körper,
  unterteilt in Statik und Dynamik.
- Mechanik der flüssigen Körper **(Hydromechanik),**
  unterteilt in Hydrostatik und Hydrodynamik.
- Mechanik der luftförmigen Körper **(Aeromechanik),**
  unterteilt in Aerostatik und Aerodynamik.

A. Mechanik der festen Körper.

5. **Die Ursache aller Bewegungserscheinungen ist die Kraft.**

6. Die Kraft als solche ist **nicht erkennbar.** Man kann nur aus der Wirkung auf ihr Vorhandensein und ihre Größe schließen.

7. Die Wirkung einer Kraft kann aus der von ihr erzeugten **Bewegungen** bzw. aus einer **Bewegungsänderung,** d. h. einer Beschleunigung oder Verzögerung erkannt werden.

Beispiele:

Ein Güterwagen wird auf ebener Strecke von einer Lokomotive abgestoßen. Er verlangsamt seine Bewegung bis zum Stillstand, erleidet also eine Verzögerung, die durch die Reibungskräfte in den Radachsen und durch den Luftwiderstand hervorgerufen wird.

8. Die Größe einer Kraft ist aus der Größe ihrer Wirkung erkennbar.

9. **Als Einheit der Kraftgröße gilt im technischen Maßsystem das Kilogramm.** Sie ist also bezogen auf die Anziehungskraft der Erde und entspricht dem Gewicht von 1 kg.

10. Da die Anziehungskraft der Erde nicht überall gleich ist (so ist sie an den Polen etwas größer als am Äquator), ist es nicht zweckmäßig, von dieser Einheit als Grundgröße auszugehen.

Das physikalische Maßsystem betrachtet daher nicht die Kraft, sondern die **Masse** als Grundeinheit, wobei als diese ein Kubikdezimeter Wasser von 4° Celsius gilt, die unglücklicherweise auch die Bezeichnung „kg" (Kilogramm-Masse) erhalten hat.

Die Masse als solche ist überall gleich groß. Jedoch wird sie, je nach der an ihr angreifenden Kraft, eine größere oder kleinere Beschleunigung erfahren.

Als Einheit der Kraft wählt daher der Physiker diejenige Kraft, die der Masseneinheit (1-g-Masse) die Beschleunigungseinheit (1 cm/sec^2) verleiht und nennt sie **Dyne.**

11. Eine Kraft ist eindeutig bestimmt durch Größe, Richtung und Angriffspunkt.

12. Innerhalb der Richtungslinien läßt sich die Kraft verschieben, ohne daß eine Änderung der Wirkung eintritt.

Beispiel:

Es ist in der Wirkung gleich, ob eine Lokomotvie vorn, in der Mitte oder hinten den Zug bewegt.

13. Eine Änderung des Angriffspunktes bringt eine Änderung der Wirkung mit sich.

Beispiel:

Greift eine Kraft einseitig an einer Platte an, so wird diese zunächst eine drehende Bewegung ausführen, bevor sie sich gradlinig fortbewegt.

14. Wirken zwei gleich große Kräfte an einem Körper in der gleichen Richtung, aber entgegengesetzt, so tritt keine Änderung des Bewegungszustandes, wohl aber eine Spannung in dem Körper ein. **Der Körper ist im Gleichgewicht.**

15. Greifen mehrere Kräfte am gleichen Angriffspunkt in verschiedener Richtung an, so lassen sie sich durch eine **zusammengesetzte Kraft (Resultierende)** ersetzen.

Beispiel:

Die Startmannschaften ziehen am Gummiseil des Segelflugzeuges nach verschiedenen Richtungen. Durch das „Kräfteparallelogramm" ist die Größe und die Richtung der Resultierenden bestimmt. Sind die in den beiden Startmannschaften aufgewendeten Kräfte gleich groß (wie es auch sein soll), so wird die Startrichtung des Segelflugzeuges in dessen Längsachse zwischen den beiden Startgruppen hindurchgehen.

Im anderen Falle wird das Flugzeug aus seiner Richtung herausgerissen.

16. Die Zusammensetzung von Kräften erfolgt am zweckmäßigsten **zeichnerisch** (graphisch). Hierdurch lassen sich auch in einfacher Weise Spannungen ermitteln, die in belastetem Fachwerkträgern auftreten.

Beispiel:

An einem abgestützten Wandarme hängen 100 kg. Man wählt einen Kräftemaßstab (z. B. 1 kg ≡ 1 mm) und zeichnet in diesem die Kraft auf. Man zerlege die Kraft in die Richtung der beiden Stäbe O und U und erhält in den Längen der in Richtung O und U fallenden Pfeilstrecken, die in O und U wirkenden Kräfte, deren Größe aus dem Kräftemaßstab bestimmbar ist.

17. Wirkt eine Kraft an einem in einem Drehpunkt gelagerten Hebel, so versucht sie eine Drehbewegung auszuführen.

18. Die Größe der Kraftwirkung ist von der **Größe der Kraft** und der **Länge des Hebelarmes** abhängig. Man nennt das Produkt aus Kraft und Hebelarm

das Moment.

Das **Kraftmoment** ist mathematisch ausgedrückt

$$M_K = P \cdot a$$

und das **Lastmoment**

$$M_L = L \cdot b.$$

Es herrscht **Gleichgewicht** wenn Kraftmoment = Lastmoment, also

$$\underline{P \cdot a = L \cdot b.}$$

Daraus kann man die Größe der erforderlichen Kraft errechnen.

Beispiel:

Ist ein Flugzeug mit einer Radbelastung von 1000 kg aufzubocken, so ist am Ende eines Hebelarmes von dem gezeichneten Ausmaß eine Kraft P aufzuwenden, die sich ergibt aus:

$$P \cdot a = L \cdot b$$

$$P = \frac{L \cdot b}{a}$$

oder aber mit den Werten

$$\underline{P} = 1000 \frac{30}{300} = \underline{100 \text{ kg.}}$$

19. Unter Hebelarm versteht man stets die senkrecht auf der Kraftrichtung stehende Strecke.

In Bezug auf den Drehpunkt D gilt **also nicht** $P \cdot a$ und $K \cdot b$, **sondern** $P \cdot a'$ und $L \cdot b'$. Die Größen von a' und b' werden auch hier zweckmäßigerweise zeichnerisch gefunden.

20. Zu beachten ist, daß bei zum Hebel schrägstehender Kraftrichtung ein *Kraftteil* (*Komponente*) *in Richtung des Hebels* fällt.

Wie aus der Zeichnung zu ersehen ist, versuchen die Kraftanteile P' und L' den Hebel nach unten, in seiner Richtung, zu verschieben. Die Lagerung im Drehpunkt muß also fest sein, um diese Kräfte aufnehmen zu können.

21. Momente und Kräfte haben an sich keine Vorzeichen. Versieht man sie jedoch mit solchen, so will man damit nur die Richtung ihrer Wirkung anzeigen.

Man kann z. B. rechtsdrehende Momente mit einem positiven und linksdrehende Momente mit einem negativen Vorzeichen versehen.

22. Wirken in Bezug auf einen Drehpunkt in der gleichen Ebene mehrere Momente, so kann man sie unter Berücksichtigung der in Ziffer 21. gegebenen Vorzeichenregel algebraisch addieren.

Man erhält das **resultierende Moment.**

Beispiel:

$$P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3 = Mr$$

$P_1 = 5$ kg	$P_2 = 10$ kg	$P_3 = 20$ kg
$a_1 = 50$ cm	$a_2 = 40$ cm	$a_3 = 30$ cm

$$Mr = 5 \cdot 50 + 10 \cdot 40 - 20 \cdot 30$$

$\underline{Mr = +50 \text{ cmkg}}$ (also rechtsdrehend).

23. Die Aussage von Ziffer 14. kann jetzt vervollständigt werden:

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm wirkenden Kräfte und die Summe aller Momente gleich Null ist.

D. h.: Alle entgegengesetzt wirkenden Kräfte und Momente heben sich auf (**Gleichgewichtsbedingung**).

24. Die Gleichgewichtsbedingungen werden dazu benutzt, die **Auflagedrucke** von Balken usf. zu bestimmen.

Ein Balken von der Länge l ist durch die vertikale Kraft P belastet. Die bei A und B entstehenden Auflagedrucke sind P entgegengesetzt und gleich.

Also: $A + B = P$ (Kräftegleichheit),

oder $A + B - P = 0$ (Summe der Kräfte = 0).

Ebenso gilt mit.

A als Drehpunkt:

$B \cdot l = P \cdot A$ (Momentengleichheit),

$B \cdot l - P \cdot A = 0$ (Summe der Momente gleich Null),

B als Drehpunkt:

$A \cdot l = P \cdot B$ (Momentengleichheit),

$A \cdot l - P \cdot B = 0$ (Summe der Momente gleich Null),

Beispiel:

$P_1 = 100$ kg $a = 80$ cm	$P_2 = 200$ kg $b = 120$ cm $l = 300$ cm	$P_3 = 80$ kg $c = 200$ cm

Daß mehrere Kräfte gewählt wurden, spielt keine Rolle. Das Prinzip bleibt das gleiche.

Das Auflager B wird als bewegliches Lager gezeichnet, da man den Brückenträgern eine durch die Wärme bedingte Ausdehnungsmöglichkeit geben muß.

Die Auflagerdrucke sind:

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 = 480 \text{ kg}.$$

Hinsichtlich der Momente gilt für A als Drehpunkt:

$$B \cdot l = P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + P_3 \cdot c,$$
$$B \cdot 300 = 100 \cdot 80 + 300 \cdot 120 + 80 \cdot 200,$$
$$B \cdot 300 = 8000 + 36000 + 16000,$$
$$B \cdot 300 = 60000 \text{ cm/kg},$$
$$\mathbf{B = 200 \text{ kg}}.$$

Da $A + B = 480$ kg ist, muß sein:

$$A = 480 - B = 480 - 200;$$
$$\mathbf{A = 280 \text{ kg}}.$$

25. Wirken die Belastungen nicht mehr parallel und senkrecht, so ist auch die Richtung des Auflagerdrucks im festen Lager unbekannt.

Die Richtung des Auflagerdruckes im beweglichen Lager verläuft jedoch stets senkrecht zum Lager, da ein bewegliches Lager seitliche Kräfte nicht aufnehmen kann.

Die Richtung im festen Lager kann durch Verlängerung der Kraftrichtungen von P und B bis zu deren Schnittpunkte dadurch gefunden werden, daß man diesen Schnittpunkt mit dem festen Auflager verbindet.

Da man eine Kraft in ihrer Richtung verschieben kann, verschiebt man P bis zum Schnitt-

punkt S und zerlegt sie dann (zeichnerisch) in ihre Koponenten A und B.

26. Greifen mehrere Belastungen verschiedener Richtungen an, so muß man die Kräfte paarweise zum Schnitt bringen und so die Resultierende suchen.

27. Wirken zwei parallele, gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte an einem Körper, so bilden sie ein **Kräftepaar**.

Das Kräftepaar setzt den Körper in eine drehende Bewegung. Die Wirkung des Kräftepaars nennt man ein **Drehmoment**, dessen Größe

$$Md = P \cdot l$$

ist.

Solche Drehmomente treten in den Antriebsmechanismen von Kraftmaschinen auf.

28. Ein reines Kräftepaar erzeugt **nur** eine Drehung des Körpers, aber keine Fortbewegung. Es übt keinen Lagerdruck aus. Praktisch findet man solche Kräftepaare selten. Als Beispiel kann der leerlaufende Elektromotor angeführt werden, bei welchem ein zusätzlicher Lagerdruck (außer durch das Gewicht des Ankers) nicht auftritt.

29. Wirkt dagegen **eine Umfangskraft P** (z. B. Seil oder Riemenzug) an einer Scheibe mit dem Halbmesser r, so entsteht wohl ein **Drehmoment**,

$$Md = P \cdot r,$$

aber auch eine zusätzliche Lagerbelastung von der Größe P.

Würde man die **Umfangskraft** P nach oben wirken lassen, und ihr die Größe des Scheibengewichtes G geben, so könnte man tatsächlich erreichen, daß der Lagerdruck Null wird.

P P $+P-G=0$

r

G

30. Ein sich in Bewegung befindlicher Körper würde sich mit der ihm erteilten Geschwindigkeit immerzu fortbewegen, wenn nicht andere Kräfte (wie etwa Reibungskräfte) ihn daran hindern würden.

Sieht man von diesen Widerständen ab, so bewegt sich der Körper mit **gleichförmiger Geschwindigkeit**, d. h. er legt in der gleichen Zeiteinheit stets den gleichen Weg zurück.

Mathematisch lautet der Ausdruck:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

oder

Geschwindigkeit:	$v = \frac{s}{t}$	$\frac{m}{s}$	und damit
Weg:	$s = v \cdot t$	m	und
Zeit:	$t = \frac{s}{v}$	s	

31. **Wirkt die Kraft dauernd fort**, so wird die Bewegung des Körpers eine **gleichförmig beschleunigte**, d. h. seine Geschwindigkeit erfährt in der Zeiteinheit einen immer gleichen Zuwachs. Ist der **Geschwindigkeitszuwachs** v m pro sec, so wird die **Beschleunigung:**

Beschleunigung: $b = \frac{v}{t}$

$\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{m}{s^2} = ms^{-2}$.

Die Geschwindigkeit nach t sec ist also:

$$v = b \cdot t.$$

Beispiel:

Hat ein Körper die Anfangsgeschwindigkeit $v_a = 5$ m/s und wirkt auf ihn 8 sec lang die Beschleunigung $b = 2$ m/s² dann ist die Endgeschwindigkeit v_e

$$v_e = v_a + b \cdot t$$
$$v_e = 5 + 2 \cdot 8$$
$$v_e = 21 \text{ m/s.}$$

32. Eine gleichmäßig wirkende Kraft ist die Anziehungskraft der Erde. **Im freien Fall** (ohne Widerstände, also im luftleeren Raum) erleiden die Körper eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung, die die Erde den Körpern erteilt, wurde durch Versuche zu

im Mittel 9,81 m/s²

gefunden. An den Polen ist sie etwas größer, am Äquator etwas kleiner. Ebenso nimmt sie mit steigender Höhe ab, was aber für technische Zwecke belanglos ist.

Man nennt die von der Anziehungskraft der Erde erteilte Beschleunigung die **Gravitationskonstante** und bezeichnet sie mit **g.**

33. Ein **frei fallender Körper** erreicht also nach t sec eine

Geschwindigkeit: $v = g \cdot t$

Bei gleichbleibender Geschwindigkeit (Ziffer **30.**) war nach t sec der zurückgelegte Weg $s = v \cdot t$.

Bei der gleichförmigen Beschleunigung würde ein freifallender Körper, dessen Anfangsgeschwindigkeit Null war, nach t sec den gleichen Weg zurückgelegt haben wie ein Körper mit gleichbleibender Geschwindigkeit, wenn dieser sich mit der mittleren Geschwindigkeit $v_m = \frac{v_a + v}{2}$ bewegt, oder aber, da die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist $v_m = \frac{v}{2}$.

Führt man an Stelle des Weges s die Fallhöhe h ein und setzt man v_m an Stelle von v, so wird

$$h = v_m \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t \quad \text{und mit}$$

$$v = g \cdot t \quad \text{die}$$

Fallhöhe: $h = \frac{gt^2}{2}$

oder, wenn man $t = \frac{v}{g}$ einführt, die

Fallhöhe: $h = \frac{v^2}{2g}$

die man auch **Geschwindigkeitshöhe** nennt.

Ferner erhält man aus der Geschwindigkeitshöhe eine Beziehung für die

Geschwindigkeit: $v = \sqrt{2gh}$

Weiter ergibt sich die

Fallzeit: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

34. Ein aus 1000 m Höhe abstürzender Körper wird also mit einer Geschwindigkeit

$$\underline{v} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 - 1000} = \underline{\approx 140 \text{ ms}}$$

aufschlagen und dabei eine Zeit

$$\underline{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{9{,}81}} = \underline{14{,}3 \text{ s}} \text{ benötigen.}$$

Da jedoch mit steigender Geschwindigkeit im lufterfüllten Raum der Luftwiderstand ebenfalls stark anwächst, wird schließlich eine konstante Fallgeschwindigkeit erreicht, bei welcher sich anwachsender Luftwiderstand und Fallbeschleunigung das Gleichgewicht halten. Diese konstante Geschwindigkeit ist von der Art des Körpers und der Beschaffenheit seiner Oberfläche abhängig.

So wird ein frei fallender menschlicher Körper kaum eine größere Fallgeschwindigkeit als etwa 70 m pro Sekunde und eine Bombe nicht mehr als 400 m pro Sekunde (Stromlinienform) bei mehr als 10000 m Fallhöhe erreichen.

35. Wird ein Körper aus einem bewegten Luftfahrzeug abgeworfen, so unterliegt er zwei verschiedenen Einflüssen:

a) Entsprechend den Fallgesetzen *bewegt er sich zur Erde.*

b) Durch die Flugzeuggeschwindigkeit erhält er *eine horizontale Bewegung.*

Der Einschlagpunkt wird also von E nach E_1 um die Strecke s vorverlegt. Da sich das Flugzeug mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v bewegt, wird nach Ziffer **30** das Wegstück

$$s_x = v \cdot t,$$

wobei t der Fallzeit entspricht, also nach Ziffer **33.**

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ ist.}$$

Damit wird:

$$s_x = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Natürlich sind auch hier die Widerstandskräfte durch die Reibung der Luft zu berücksichtigen, so daß die theoretische Vorhaltestrecke von der praktischen abweicht. Diese Abweichung ist von der Bauart des Bombenkörpers abhängig und muß durch eingehende Versuche geklärt werden.

36. Bewegt sich ein Körper um einen Punkt, beschreibt er also eine Kreisbahn, so nennt man diese Bewegung eine **Zentralbewegung.**

Die *Geschwindigkeitsrichtung* v steht in jedem Augenblick *senkrecht auf dem Halbmesser* r.

$$\frac{U}{v} = \frac{s}{r}$$

$$U = \frac{v \cdot s}{r}$$

$$\frac{U}{t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{s}{t}$$

$$\frac{U}{t} = b_r = \frac{v}{r} = \frac{s}{t}$$

$$\frac{s}{t} = v$$

$$\boxed{b_r = \frac{v^2}{r}}$$

Würde der Körper frei sein, so würde er sich in der *Tangentialbahn* weiterbewegen. Damit jedoch der Körper in der Kreis-

bahn bleibt, muß eine Kraft aufgewendet werden, die ihm eine radiale, d. h. nach dem Mittelpunkt gerichtete Beschleunigung verleiht.

Es läßt sich durch eine hier nicht durchgeführte mathematische Betrachtung feststellen, daß die **Radialbeschleunigung** den Wert:

$$\boxed{b_r = \frac{v^2}{r}} \text{ m/s}^2 \text{ annimmt.}$$

Die Radialbeschleunigung bekommt besondere Bedeutung bei der Berechnung der Zentrifugal- und Zentripetalkräfte zu (vgl. Ziff. **39**).

37. Die von einer Kraft einem Körper erteilte Beschleunigung hängt von der Masse des Körpers ab.

Beispiel:

Zwei Eisenbahnwagen werden von der gleichen Kraft nicht so stark beschleunigt werden, wie nur einer.

Der Zusammenhang, der zwischen Masse und Kraft besteht, wurde von Newton in dem Gesetz ausgedrückt:

Kraft = Masse · Beschleunigung

oder

$$\boxed{P = m \cdot b}$$

38. Im freien Falle tritt das Gewicht des Körpers als Kraft und die Beschleunigung als Gravitationskonstante g auf. Es ist also in diesem Sonderfalle

$$\mathbf{G = m \cdot g,}$$

woraus man die Größe der Masse herleiten kann:

$$\boxed{m = \frac{G}{g}}$$

39. In Ziffer **36** wurde die Radialbeschleunigung zu

$$b_r = \frac{v^2}{r} \text{ m/s}^2 \text{ angegeben.}$$

Führt man diesen Wert in der Gleichung $P = m \cdot b$ ein, so erhält man die **Zentrifugalkraft:**

$$Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Die Zentrifugalkraft ist diejenige Kraft, die einen auf einer Kreisbahn sich bewegenden Körper vom Mittelpunkt entfernen will.

Um ihn daran zu verhindern, ist eine gleich große aber entgegengesetzte Kraft, die Zentripetalkraft notwendig.

Diese macht sich beispielsweise in der Zugkraft einer Schnur bemerkbar, an der eine Kugel im Kreis geschwungen wird. Reißt die Schnur, so fliegt die Kugel nicht in radialer, sondern in tangentialer Richtung ab.

Beispiel:

1. In der Steilkurve bewegt sich ein Flugzeug zentral um einen Mittelpunkt und unterliegt einer Zentrifugalkraft. Diese wird von den am Tragwerk herrschenden Luftkräften aufgenommen. Der Flugzeugführer ist der Zentrifugalkraft ebenso ausgesetzt und wird durch diese auf den Sitz gedrückt.

Ist der beschriebene Kreishalbmesser r = 100 m und die Geschwindigkeit des Flugzeuges 260 km pro Stunde (rund 72 m pro Sekunde) und nimmt man das Gewicht des Führers mit G = 80 kg, also seine Masse nach Ziffer 38 zu

$$m = \frac{G}{g} = 8{,}15$$

an, so erhält man eine Zentrifugalkraft von

$$\underline{Z} = \frac{v\,m^2}{r} = \frac{8{,}15 \cdot 72^2}{100} = \underline{\approx 420 \text{ kg}}$$

d. h. der Flugzeugführer wiegt scheinbar etwa fünfmal soviel.

2. Die im vorigen Beispiel auftretende Radialbeschleunigung

$$b_r = \frac{v^2}{r}$$

ist somit aus $Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$

$$\frac{v^2}{r} = b_r = \frac{Z}{m}$$

oder mit $m = \frac{G}{g}$

$$\underline{b_r} = \frac{v^2}{r} = \frac{Z \cdot g}{G} = \frac{420}{80} g = \underline{5{,}25 \text{ g.}}$$

Diese Beschleunigung liegt an der Grenze dessen, was ein gesunder Mensch in sitzender Stellung aushalten kann (Entblutung des Herzens).

3. Zwischen der Steilkurve und dem Geradeausflug sind verschiedene Kurvenlagen möglich. Notwendig für eine sauber geflogene Kurve, also eine nicht hängende oder schiebende Maschine, ist jedoch, daß die **Resultierende aus Gewicht des Flugzeuges und der Zentrifugalkraft stets in die Ebene der Hochachse** des Flugzeuges fällt. Die Größe der Resultierenden ist gleichzeitig das Maß für die Belastung des Tragwerkes in der Kurve.

Ist das Gewicht des Flugzeuges G = 1700 kg und seine Geschwindigkeit 360 km pro Stunde = 100 m pro Sekunde, mit der ein Kreishalbmesser von 500 m beschrieben wird, so kann die dann nötige Schräglage des Flugzeuges bestimmt werden.

Nach dem Rechnungsgang in Beispiel 1 ist

$$\underline{Z} = \frac{mv^2}{r} = \frac{1700}{g} \cdot \frac{10000}{500} = \underline{3400 \text{ kg}}$$

($g = \approx 10$ gerechnet).

Zeichnet man senkrecht zueinander im Maßstab 1 mm $\equiv$ 100 kg die Kräfte auf, also G mit 17 mm und Z mit 34 mm, so erhält man die Schräglage des Flugzeuges, die man aus der Zeichnung bestimmen kann und die Größe der Resultierenden zu rd. 38 mm, was im gewählten Kräftemaßstab eine Belastung von R = 3800 kg entspricht.

40. Um einen Körper in Bewegung zu setzen, sind nicht nur Kräfte notwendig, um seine Masse zu beschleunigen, sondern auch Kräfte zur Überwindung vorhandener Widerstände.

Besonders groß sind die **Kräfte beim Start eines Flugzeuges:**

a) Es muß die Masse des Flugzeuges von der Geschwindigkeit Null auf Reisegeschwindigkeit beschleunigt werden.

b) Roll- und Luftwiderstände müssen überwunden werden. Hebt das Flugzeug vom Boden ab, so verschwinden die Rollwiderstände.

c) Im Steigflug muß das Flugzeug auf größere Höhen gehoben werden.

Hat das Flugzeug eine gleichförmige Geschwindigkeit erreicht, so werden die Beschleunigungskräfte Null.

Fliegt das Flugzeug horizontal, so fällt auch die Hubarbeit weg und es bleibt nur noch eine Zugkraft übrig, die die Luftwiderstände zu überwinden hat.

In welcher Form aus den Luftwiderständen der Auftrieb entsteht, der im Horizontalflug gleich dem Gewicht des Flugzeuges sein muß, wird in den „Lehrblättern für die technische Ausbildung in der Luftwaffe", Abschnitt: „Physik des Fliegens", behandelt.

41. Bewegt sich das Flugzeug unter der Zugkraft der Schraube um den Weg s fort, so hat der Motor eine **Arbeit** geleistet.

Es ist also **Arbeit, das Produkt aus Weg und Kraft in der Wegrichtung,** also

$$\boxed{A = s \cdot P} \quad \text{Meter-Kilogramm (mkg).}$$

Die Arbeit ist unabhängig von der Zeit.

Es wird also nichts darüber ausgesagt, in welcher Zeit die Kraft P den Weg = s zurücklegt.

42. Als grundlegendes Gesetz hat **Robert Mayer** erkannt:

Arbeit (Energie) kann weder gewonnen noch verloren werden. Lediglich eine Umsetzung in verschiedene Formen ist möglich (Gesetz von der Erhaltung der Energie).

43. Es gibt viele derartige **Umsetzungsformen.** Man kann beispielsweise aus einer Wasserkraftanlage mechanische Arbeit, aus mechanischer Arbeit elektrische Arbeit, aus dieser Wärme und aus Wärme mechanische Arbeit erzeugen.

Bei allen diesen Umsetzungen wird keine Arbeit verloren und keine gewonnen.

Wenn es auch den Anschein hat, als ob Arbeit verlorenginge, so stimmt dieses nur insofern, als man nicht alle aufgewendeten Energien zu dem gewollten Endzweck führen kann.

Z. B. wird nur ein kleiner Teil, der im Kraftstoff ruhenden Wärmemengen, zu tatsächlicher gewollter Arbeit umgesetzt. Ein Teil geht zwecklos in den heißen Auspuffgasen weg, ein anderer Teil wird im Kühlwasser vernichtet, ein weiterer durch Lagerreibung wieder in nutzlose Wärme umgesetzt usf.

Man nennt das Verhältnis:

$$\frac{\text{nutzbringende Arbeit}}{\text{aufgewendete Arbeit}} = \text{Wirkungsgrad}$$

und erkennt, daß der **Wirkungsgrad nie ganz 1** sein kann, wenn man auch bestrebt ist, dieser Größe nahezukommen.

Mit dieser Erkenntnis fallen auch alle Bemühungen ein „Perpetuum mobile" zu bauen.

44. Eine Arbeit besonderer Art leistet eine abgeworfene Bombe. Die in das Geschoß hineingesteckte Arbeit ist:

$$A = \textbf{Fallhöhe} \cdot \textbf{Gewicht}$$

oder $$A = h \cdot G \text{ mkg.}$$

Dabei hat die Geschwindigkeit zugenommen bis zur Aufschlagegeschwindigkeit, die im Augenblick des Aufschlagens Null wird. In diesem Augenblick wird die auf dem Fallweg aufgespeicherte Arbeit frei. Sie setzt sich in **Wucht** (oder **kinetische Energie**) um.

Die **Größe der kinetischen Energie** ist von der Masse der Bombe abhängig.

In der Beziehung

$$A = h \cdot G$$

wird nach Ziffer **33** h ersetzt durch $h = \frac{v^2}{2g}$

und nach Ziffer **38** G durch $G = m \cdot g$

Man erhält die

Kinetische Energie (Wuchtarbeit).
$$A = \frac{m v^2}{2} \text{ mkg}$$

oder
$$A = \frac{G}{2 g} \cdot v^2 \text{ mkg.}$$

Beispiel:

Eine Granate hat ein Gewicht von 10 kg. Mit einer Geschwindigkeit von 300 m pro Sekunde entwickelt sie eine **Wucht** von

$$\underline{A} = \approx \frac{10 \cdot 90\,000}{2 g} = \approx \underline{45\,000 \text{ mkg.}}$$

45. Die **Arbeitsformen** sind:

a) **Mechanisch:** Meter · Kilogramm (mkg).

b) **Wärme:** Wärmeeinheit (WE). Man versteht darunter die Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 kg Wasser von 14,5 auf 15,5 (rd. um einen Grad) bei einem atmosphärischen Druck von 760 mm Quecksilbersäule zu erwärmen.

c) **Elektrisch:** Kilowattstunde (kWh).

Die **Zusammenhänge** zwischen den einzelnen Arbeitsformen sind:

427 mkg	=	1 WE
860 WE	=	1 kWh
367134 mkg	=	1 kWh

Beispiele:

1. Um ein Flugzeug mit einem Gewicht G = 1000 kg auf 500 m zu heben, ist eine Hubarbeit notwendig von

$$\underline{A} = 1000 \cdot 500 = \underline{500\,000 \text{ mkg}}$$

(mech. Arbeit) oder in Wärme ausgedrückt

$$\text{WE} = \frac{500\,000}{427} = \approx \underline{1170 \text{ WE.}}$$

Da man ferner festgestellt hat, daß in einem kg Kraftstoff rd. 10000 WE stecken, werden (theoretisch) benötigt

$$\frac{1170}{10\,000} = \approx \underline{0{,}117 \text{ kg.}}$$

Praktisch wird der Bedarf nach dem in Ziffer 43 Gesagten etwa das Fünffache betragen.

2. Zur Erwärmung von 30 kg Kühlwasser von 20° auf 90°, also um 70°, werden benötigt

70 WE

oder $70 \cdot 427 =$ **29890 mkg.**

46. Wenn zwei Arbeiter die gleiche Arbeit zu erledigen haben, so wird man denjenigen als Leistungsfähigeren bezeichnen, der mit der Arbeit schneller fertig wird. Es ist also **die Zeit ein Maßstab für die Größe der Leistung.** Man bezeichnet:

Leistung = Arbeit in der Zeiteinheit

Es ist also $N = \frac{m \cdot kg}{sec}.$

Als **Einheit der Leistung** wählte man willkürlich die sogenannte **Pferdestärke.**

In der **Elektrotechnik** dagegen **verwendet** man als **Leistungseinheit das Watt** bzw. das Kilowatt.

Bereits James Watt stellte durch Versuche die **Pferdestärke** als eine Leistung fest, bei welcher in **einer Sekunde 75 kg ein Meter hoch gehoben werden,** also

1 PS = 75 mkg pro Sekunde.

Die Beziehungen zwischen Kilowatt (kW) und PS sind:

1 PS = 0,736 kW

oder **1 kW = 1,36 PS.**

Die Leistungsgleichung für PS lautet

$$N = \frac{m\,kg}{75 \cdot sec}\ PS$$

und für **Kilowatt** $N = \frac{m \cdot kg}{75 \cdot sec} \cdot 0{,}736\ kW.$

47. Da in der Leistungsgleichung Meter pro Sekunde = v = Geschwindigkeit und kg = P = Kraft gesetzt werden kann, erhält man die Leistungsgleichheit in der Form

$$\boxed{N = \frac{P \cdot v}{75}} \text{ PS.}$$

Beispiel:

1. Ein Flugzeug soll in 5 Minuten = 300 Sekunden eine Höhe von 1800 m erreichen. Sein Gewicht ist G = P = 1500 kg.

Man erhält die Steiggeschwindigkeit zu

$$\underline{v_s} = \frac{1800}{300} = \underline{6 \text{ m/sec,}}$$

damit wird die vom Motor aufgewendete Hubleistung

$$\underline{N} = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{1500 \cdot 6}{75} = \underline{120 \text{ PS.}}$$

Die tatsächliche Leistung des Motors wird durch den Wirkungsgrad der Luftschraube und die sonstigen Verlustleistungen noch bedeutend größer sein müssen.

2. Ein Flugzeug benötigt nach Modellversuchen eine Schraubenzugkraft von 300 kg im Horizontalflug in Bodennähe. Die dabei erreichte Geschwindigkeit ist 260 km/st. Die Steiggeschwindigkeit soll in Bodennähe 5 m/sec sein.

Die Geschwindigkeit in m/sec ist also im Horizontalflug:

$$v = \approx 72 \text{ m/s.}$$

Damit wird die im Horizontalflug aufzuwendende Leistung (ohne Berücksichtigung des Schraubenwirkungsgrades)

$$\underline{N} = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{300 \cdot 72}{75} = \underline{288 \text{ PS.}}$$

Ist der Schraubenwirkungsgrad mit 0,8 anzunehmen, dann ist vom Motor tatsächlich (effektiv) aufzubringen:

$$\underline{Ne} = \frac{288}{0,8} = \underline{360 \text{ PS.}}$$

Für die **Hubleistung** ist nötig, wenn das Flugzeug ein Fluggewicht von 6000 kg hat:

$$\underline{Nh} = \frac{6000 \cdot 5}{75} = \underline{400 \text{ PS}},$$

und unter Berücksichtigung des Schraubenwirkungsgrades effektiv

$$\underline{Nhe} = \frac{400}{0,8} = \underline{500 \text{ PS}}.$$

Im Steigflug hat also die Triebwerkanlage insgesamt aufzubringen:

$$\underline{Ngs} = 360 + 500 = \underline{\mathbf{860 \text{ PS}}}.$$

48. Vielfach hat man statt der Geschwindigkeit die in der Zeiteinheit geförderte oder zu fördernde Menge. Z. B. wird bei der Ausnutzung einer **Wasserkraft** stets die je Sekunde abfließende Wassermenge und die Gefällshöhe bekannt sein. Ebenso werden bei der Bestimmung der Förderleistung von **Pumpen** immer die zu förderne Menge und die Druckhöhe gegeben sein. Auch hier geht man auf die Grundform der Leistung zurück.

$$N = \frac{m \cdot kg}{75 \cdot sec} \text{ PS} \quad (\text{Ziffer } \mathbf{46}).$$

Bezeichnet man mit Q die je Sekunde geförderte Flüssigkeitsmenge in kg (nur bei Wasser stimmt kg mit Liter überein) und h die Förderhöhe in Meter, so sieht die Leistungsgleichung wie folgt aus:

$$\underline{\underline{\mathbf{N = \frac{Q \cdot h}{75} \text{ PS}.}}}$$

Beispiel:

1. Eine Wasserkraft bringt je Sekunde 200 l = 200 kg Wasser. Dann ist die unter Vernachlässigung des Wirkungsgrades zu erwartende Leistung

$$\underline{N} = \frac{200 \cdot 150}{75} = \underline{400 \text{ PS}}.$$

Wird der Wirkungsgrad (nach Art der eingebauten Turbine) mit 0,75 angenommen, so beträgt die tatsächliche, **effektive Leistung**

$$\underline{Ne} = N \cdot 0,75 = \underline{300 \text{ PS}}.$$

2. Hat eine Pumpe eine Salzsole mit dem Einheitsgewicht von 1,3 kg pro Liter auf 75 m zu fördern, und soll die sekundliche Fördermenge 50 l betragen, so ist die **aufzuwendende Leistung** theoretisch

$$\underline{N} = \frac{50 \cdot 1{,}3 \cdot 75}{75} = \underline{65 \text{ PS.}}$$

Nimmt man einen Wirkungsgrad der Pumpe von 0,65 an, so ist tatsächlich **(effektiv)** aufzuwenden

$$\underline{Ne} = \frac{65}{0{,}65} = \underline{100 \text{ PS.}}$$

Anmerkung:

Bei **Kraftmaschinen** (krafterzeugenden) erscheint der **Wirkungsgrad im Zähler** und bei **Arbeitsmaschinen im Nenner.**

49. Vergleicht man die Grundgrößen der Elektrotechnik mit denen einer Wasserkraft, so gelangt man zu einer ähnlichen Leistungsgleichung, auf deren innerem Aufbau hier nicht eingegangen werden soll.

Die **elektrischen Grundgrößen** sind:

E = **Volt** = Spannung (entsprechend der Gefällshöhe).
I = **Ampere** = Stromstärke (entsprechend der Wassermenge).

Die **Leistung** ist:

bei **Gleichstrom:** $$Nel = \frac{E \cdot J}{1000} \text{ kW,}$$

bei **Wechselstrom:** $$Nel = \frac{E \cdot J}{1000} \cdot \cos \varphi \text{ kW.}$$

Dabei kann

$\cos \varphi = 0{,}85$ bei Lichtbetrieb,
$\cos \varphi = 0{,}7$ bei Motorenbetrieb

angenommen werden. (Vorausgesetzt 50 Perioden pro Sekunde.)

Beispiel:

1. Ein Stromerzeuger liefert bei 24 Volt 100 Ampere Gleichstrom. Die elektrische Leistung ist somit

$$\underline{Nel} = \frac{24 \cdot 100}{1000} = \underline{2{,}4 \text{ kW,}}$$

oder in PS $\underline{Nel} = 2{,}4 \,.\, 1{,}36 = \underline{3{,}26 \text{ PS}}$ (Ziffer **46**).

Dem Triebwerk werden allerdings, wenn man den Wirkungsgrad mit 0,7 annimmt, entzogen:

$$\frac{3,26}{0,7} = \underline{4,65 \text{ PS.}}$$

2. Eine Leitung ist mit 20 Ampere abgesichert. Das Bordnetz hat 24 Volt Spannung. Damit kann der Leitung entzogen werden

$$\underline{\text{Nel}} = \frac{20 \cdot 24}{1000} = \underline{0,48 \text{ kK}}$$

oder $$0,48 \cdot 1,36 = \underline{0,65 \text{ PS.}}$$

Soll damit ein Motor mit einem Wirkungsgrad von 0,7 angetrieben werden, so kann man an dessen Welle höchstens eine mechanische Leistung von

$$\underline{N_{mech}} = 0,65 \cdot 0,7 = \underline{0,45 \text{ PS}}$$

entnehmen.

50. Die **Leistungsbestimmung eines Motors** erfolgt durch den Versuch. Dabei wird der Motor abgebremst und die bei einer bestimmten Umdrehungszahl je Minute aufgewendete Bremskraft (Drehungsmoment) ermittelt.

Die **Abbremsung** kann auf die verschiedensten Arten erfolgen.

Man unterscheidet:

1. Abbremsen mit Bremsscheiben oder Bremsbändern (diese Art kommt bei Flugmotoren nicht in Betracht).
2. Hydraulische Abbremsungen (z. B. durch Junkers Wasserwirbelbremse).
3. Elektrische Bremsung.
4. Abbremsung durch Pendeldynamometer. Bei diesem wird das Drehmoment durch den Rückdruck des arbeitenden Motors bestimmt. Diese letzte Methode findet zur Leistungsbestimmung von Flugmotoren fast ausschließlich Verwendung.

51. Das mathematische Rüstzeug zur Auswertung der Bremsversuche wird durch einfache Betrachtung gewonnen.

Dreht sich die gezeichnete Scheibe mit einer Umdrehungszahl n pro Minute, so ist die Umfangsgeschwindigkeit, da bei

einer Umdrehung der Umfang der Scheibe $2 \cdot r \cdot \pi$, bei n Umdrehungen jedoch der n-fache Wert je Minute zurückgelegt wird:

$$v = \frac{2 r \cdot \pi \cdot n}{60} \text{ m/s.}$$

(Scheibendurchmesser in m einführen.)

Ist ferner die an der Scheibe wirkende Umfangskraft P Kilogramm, so ist nach Ziffer **47**

$$N = \frac{P \cdot v}{75},$$

oder mit dem Wert für v

$$N = \frac{P \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n}{75 \cdot 60}.$$

Hierin ist $P \cdot r = Md$, das an der Scheibe wirkende Drehmoment. Rechnet man die übrigbleibenden Konstantwerte aus

$$\frac{2 \pi}{75 \cdot 60} = \frac{1}{716{,}2}$$

und führt diese in der obigen Gleichung ein, so erhält man

$$\boxed{N = \frac{Md \cdot n}{716{,}2}}$$

und daraus

$$Md = 716{,}2 \cdot \frac{N}{n}.$$

Hierbei wird das Drehmoment in **mkg** errechnet.

Für die Errechnung des Drehmomentes in **cmkg** lautet die Gleichung:

$$N = \frac{Md \cdot n}{71620}.$$

52. Prinzip der Leistungsbestimmung mittels Bremszaum.

Eine auf der Motorwelle aufgesetzte Bremsscheibe wird vermittels Bremsbacken abgebremst. Dabei ist die durch die Reibung zwischen Scheibe und Bremsbacken entstehende Umfangskraft P zu überwinden.

Der Druck wird durch eine Federwaage angezeigt, auf der das Ende des Bremshebels aufliegt (F).

Da die Länge l des auf die Waage drückenden Hebelarmes bekannt ist, kann man das Bremsmoment bestimmen zu:

$$\underline{M_b = F \cdot l} = Md.$$

Gleichzeitig wurde an einem Drehzahlmesser die minutliche Umdrehungszahl n bestimmt. Aus der in Ziffer **51** errechneten Gleichung kann man die **Leistung** bestimmen zu:

$$\boxed{N = \frac{F \cdot l \cdot n}{716{,}2}} \text{ PS.}$$

Beispiel:

Ein Dieselmotor macht n = 500 Umdr/min. Die an der Waage abgelesene Belastung war F = 50 kg und die Länge des Hebelarmes l = 1 m.

Dann ist:

$$\underline{N} = \frac{50 \cdot 1 \cdot 500}{716{,}2} = = \approx \underline{35 \text{ PS.}}$$

53. Die **Pendeldynamometer** beruhen auf dem Gesetz, daß

Wirkung = Gegenwirkung.

Gibt ein rechtsdrehender Motor sein Drehmoment an die Luftschraube ab, so hat der Motor selbst das Bestreben, sich nach links zu drehen, woran er durch seine Befestigung gehindert wird.

Lagert man dagegen den Motor drehbeweglich, so kann man aus der Drehbewegung des Motors auf die abgegebene Leistung schließen. Zu beachten ist dabei, daß die Schwerpunktlage des Motors mit dem Waagenmittel zusammenfällt, was durch Tariergewichte erreichbar wird.

Ferner ist die Führung der Auspuffgase so anzuordnen, daß deren Rückwirkung keine Fälschung der Meßergebnisse verursacht. Die Abgase werden tunlichst in der Ebene der Waagenachse horizontal nach außen oder hinten geführt.

Beispiel:

Ein Motor macht 1500 Umdrehungen in der Minute. Der 2 m lange Waagenhebel ist mit 120 kg belastet. Die Leistung bestimmt sich also nach Ziffer 52 zu

$$\underline{N} = \frac{F \cdot l \cdot m}{716{,}2} = \frac{120 \cdot 2 \cdot 1500}{716{,}2} = \approx \underline{500 \text{ PS}}.$$

54. Wird gleichzeitig der **Kraftstoffverbrauch** gemessen, so kann der Wirkungsgrad (ohne Luftschraube) bestimmt werden.

Beispiel:

Ein Motor, dessen Leistung 500 PS ist, läuft 10 Minuten lang mit dieser Leistung und verbraucht dabei 21 kg Kraftstoff, dessen Wärmeinhalt zu 10000 Wärmeeinheiten je kg bekannt ist.

Die Arbeit, die der Motor leistete, war

$$500 \text{ PS} \cdot 10 \text{ Minuten} = 5000 \text{ PS Min.}$$

oder, da 1 Minute = 60 s

$$5000 \cdot 60 = 300000 \text{ PS} \cdot \text{s}.$$

Ein PS leistet jedoch nach Ziffer 46 in 1 s 75 mkg.
Also war die **effektive Gesamtarbeit**

$$A_e = 300000 \cdot 75 = 22500000 \text{ mkg}.$$

Für diese Arbeit wurden aufgewendet 21 kg Kraftstoff zu je 10000 Wärmeeinheiten, also insgesamt eine **aufgewendete Arbeit (indizierte Arbeit)** von

$$A_i = 210000 \text{ WE}.$$

Da ferner nach Ziffer **45** jede WE einer mechanischen Arbeit von rd. 427 mkg entspricht, ist die im Kraftstoff **aufgewendete mechanische Arbeit:**

$$A_i = 210000 \cdot 427 = 89670000 \text{ mkg}.$$

Damit ergibt sich nach Ziffer **43** der

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{erhaltene Arbeit}}{\text{aufgewendete Arbeit}}$$

$$\textbf{Wirkungsgrad} = \frac{22500000}{89670000} = \textbf{rd. 0,25},$$

d. h. nur 25 von Hundert der eingeführten Leistung wird an die Motorwelle abgegeben.

Nimmt man weiter einen Wirkungsgrad der Luftschraube zu 0,80, d. h. 80 v. Hundert an, so werden tatsächlich **an das Flugzeug** von der aufgewendeten Arbeit nur **abgegeben:**

$$25 \cdot 0{,}8 = \textbf{20 von Hundert.}$$

B. Mechanik der flüssigen Körper.

55. Flüssige Körper zeichnen sich von gas- bzw. luftförmigen Körpern dadurch aus, daß sie praktisch nicht zusammendrückbar sind.

Wenn trotzdem die Gesetze der Hydromechanik, besonders die Gesetze der bewegten Flüssigkeit (Hydrodynamik) in der Luftfahrtforschung Bedeutung gewonnen haben, so ist dies darauf zurückzuführen, daß man die Strömungsvorgänge der Luft in den bestehenden Geschwindigkeitsgrenzen durch eine Flüssigkeitsströmung ersetzt denken kann, da sich eine merkbare Kompression (Zusammendrückung) der Luft in den genannten Grenzen nicht zeigt.

Erst wenn die Geschwindigkeiten über den Bereich der Schallgeschwindigkeit (also über 330 m pro sec) hinausgehen, ändern sich die Verhältnisse.

56. Befindet sich eine Flüssigkeit in einem Gefäß, so übt sie auf dessen Boden und Seitenwände einen Druck aus.

Dieser **Druck** ist von der Höhe der Flüssigkeitssäulen h und dem Einheitsgewicht der Flüssigkeit γ abhängig. Er wird in kg pro qcm ausgedrückt. (1 kg/qcm = 1 Atm.)

Allgemein ist der **Druck**

$$p = \frac{h}{10} \cdot \gamma \text{ atm.}$$

Da für Wasser $\gamma = 1$ gesetzt werden kann, entspricht **1 atm** der Flüssigkeitshöhe von **10 m Wasser.**

In einer Wassertiefe von 100 m herrscht also ein **Druck** von 10 Atm, der sich infolge der leichten Beweglichkeit der Wasserteilchen **nach allen Seiten gleichmäßig fortpflanzt.**

Beispiel:

In einem großen Vorratstank steht der Spiegel des Kraftstoffes 8 m hoch. Da der Kraftstoff das Einheitsgewicht 0,7 kg/cbdcm hat, ist der **Bodendruck**

$$\underline{p} = \frac{8}{10} \cdot 0{,}7 = \underline{0{,}56 \text{ atm.}}$$

8 m

57. Der am Boden herrschende Druck nimmt nach oben ab und wird am Flüssigkeitsspiegel Null.

Der Druck auf die Gefäßwand wird daher auch geringer. Die Stärke der Gefäßwand kann also nach oben zu abnehmen, was man praktisch bei Staumauern durch entsprechende Formgebung ausgeführt sieht.

58. Im Flugzeug gewinnt der Flüssigkeitsdruck in Behältern Bedeutung, wenn man berücksichtigt, daß durch Beschleunigungs- oder Verzögerungskräfte dieser Druck sehr stark anwachsen kann.

Fällt beispielsweise eine leere Flasche zu Boden, so wird sie nicht so leicht zu Bruch gehen, als eine gefüllte.

Beispiel:

In dem Kraftstoffbehälter eines Flugzeuges ist der Flüssigkeitsstand 0,6 m hoch. Der auf dem Boden und damit auch auf die Seitenwände in Nähe des Bodens ausgeübte Druck ist bei einem Einheitsgewicht des Kraftstoffes von 0,7 nach Ziffer **56**

$$p = 0{,}06 \cdot 0{,}7 = \underline{0{,}042 \text{ atm}}$$

also in bescheidenen Grenzen.

Wird das Flugzeug jedoch aus einem Sturzflug, der mit einer Geschwindigkeit von 360 km pro Stunde = 100 m pro Sekunde ausgeführt wurde, in den Horizontalflug herausgenommen, wobei der Einschwingungshalbmesser r = 180 m ist, so wächst nach Ziffer **36** und **39** der Druck bedeutend an.

Es wird die **Radialbeschleunigung:**

$$\underline{b\,r} = \frac{v^2}{r} = \frac{10\,000}{180} = \underline{55{,}5 \text{ m/s}^2},$$

ist also $\frac{55{,}5}{g} = \approx 5{,}6$

mal so groß als die Fallbeschleunigung.

Im gleichen Maße ist auch der **Druck** im Kraftstoffbehälter gestiegen, beträgt also jetzt

$$0{,}042 \cdot 5{,}6 = \underline{0{,}235 \text{ atm.}}$$

Die gleichen Verhältnisse liegen auch im Steilkurvenflug vor, woraus zu ersehen ist, daß den Behältern durch innere Verspannungen genügend Festigkeit zu geben ist, um die Wandstärken der Gewichtsersparnis wegen in mäßigen Grenzen halten zu können.

59. Eine **strömende Flüssigkeit** zeigt hinsichtlich des Druckes ein abweichendes Verhalten.

Ist das in der Zeichnung dargestellte *Ausflußrohr geschlossen*, so herrscht an der (verschlossenen) Austrittsöffnung ein Druck, der der Gefällshöhe h entspricht, also nach Ziffer **56** ist:

$$p = \frac{h}{10} \cdot \gamma \text{ atm.}$$

Wird die *Austrittsöffnung geöffnet*, so sinkt an ihr der Druck bei der gleichen Gefällshöhe auf 0 ab. Dafür hat jedoch die Flüssigkeit eine *Geschwindigkeit* v erreicht.

Die Größe der Geschwindigkeit hängt von der Gefällshöhe ab.

Ohne Berücksichtigung der Reibung, die eine strömende Flüssigkeit an den Gefäßwänden und am Austritt (Kontraktion) erfährt,

ist die von einem Flüssigkeitsteil beim Absinken um die Gefällshöhe geleistete Arbeit (vgl. Ziffer **44**)

$$A = G \cdot h,$$

worin G das Gewicht des Flüssigkeitsteiles bedeutet.

Setzt man nach Ziffer **38** $G = m \cdot g$, so kann man auch schreiben:

$$A = m \cdot g \cdot h.$$

Andererseits wird einem fallenden Körper nach Ziffer **44** eine kinetische Energie verliehen, deren Größe ist

$$A = \frac{m\,v^2}{2}.$$

Zur Erreichung dieser kinetischen Energie wurde die Absinkarbeit verbraucht, so daß man setzen kann:

$$\frac{m\,v^2}{2} = m \cdot g \cdot h,$$

woraus man erhält die

Geschwindigkeit:	$v = \sqrt{2\,g\,h}$	m/s
Geschwindigkeitshöhe:	$h = \frac{v^2}{2\,g}$	m

(vgl. Ziffer **33**),

in anderen **Worten:**

Jeder Strömungsgeschwindigkeit entspricht eine Druckhöhe (Geschwindigkeitshöhe) und umgekehrt.

Beispiel:

Bei einer Druckhöhe von 20 m ist die Austrittsgeschwindigkeit:

$$\underline{v} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot g \cdot 20} = \approx \underline{20\ m/s.}$$

60. Die Beziehungen zwischen Querschnitt und Durchströmungsgeschwindigkeit erhält man aus folgender Betrachtung:

Die austretende Menge im Querschnitt F_1 ist von der Ausströmgeschwindigkeit v_1 abhängig und verhältnisgleich mit dem durchströmten Querschnitt.

Bezeichnet Q die austretende Flüssigkeitsmenge, so ist

$$Q = F_1 \cdot v_1$$

h
h-h'
h'
F1
v1
v2
F2

Da nach Ziffer 59

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

ist, ist also

$$\underline{Q = F_1 \cdot \sqrt{2gh}.}$$

Die im Querschnitt F_2 durchströmende Flüssigkeitsmenge kann nicht größer oder kleiner sein als die ausströmende. Da dort

die (zunächst noch unbekannte) Geschwindigkeit v_2 herrscht, muß sein

$$F_2 \cdot v_2 = F_1 \cdot v_1,$$

woraus man erhalten kann:

$$v_2 = \frac{F_1}{F_2} \cdot v_1,$$

da v_1 bekannt ist.

Schreibt man **allgemein:**

$$\boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{F_1}{F_2}}$$

so kann man sagen:

Die Durchströmgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die durchströmten Flächen.

61. Die Austrittsgeschwindigkeit im Querschnitt F_1 war

$$v_1 = \sqrt{2\,g\,h}\,.$$

Demnach muß die Geschwindigkeit im Querschnitt F_2 die Form haben:

$$\underline{v_2 = \sqrt{2\,g\,h'}.}$$

Damit kann man die Gleichung der Ziffer **60** auch in der Form schreiben:

$$\frac{\sqrt{2\,g\,h'}}{\sqrt{2\,g\,h}} = \frac{v_2}{v_1}$$

oder

$$\boxed{\frac{h'}{h} = \frac{v_2^2}{v_1^2}}$$

d. h. **die Druckhöhen verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.**

Da ferner: $$\frac{v_2}{v_1} = \frac{F_1}{F_2}$$

ist auch: $$\boxed{\frac{h'}{h} = \frac{F_1^2}{F_2^2}}$$ was bedeutet:

Die Druckhöhen verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der durchströmten Flächen.

Würde man im Querschnitt F_2 der Zeichnung von Ziffer **60** ein Manometerrohr anbringen, so würde in diesem, da F_2 größer als F_1, also v_2 kleiner als v_1 ist, der Druck auf die Höhe h' steigen, die in der Gleichung bestimmbar ist

$$h' = \frac{v_2^2}{2g}.$$

Mit *anderen Worten*: Im Querschnitt F_1 ist die *ganze*, im Querschnitt F_2 *nur ein Teil* der Gefällshöhe, nämlich $h - h'$, in Geschwindigkeit umgesetzt worden.

62. Ändert man den durchströmten Querschnitt nach der beistehenden Skizze, so erhält man die folgenden Verhältnisse:

Die Austrittsgeschwindigkeit im F_1 ist:

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Die Durchströmgeschwindigkeit im Querschnitt F_2 ist nach Ziff. **60**:

$$v2 = \frac{F_1}{F_2} \cdot v_1.$$

Da F_2 *kleiner als* F_1 ist, *wird* v_2 *größer als* v_1 oder aber h_2 *wird größer als* h_1.

D. h. **in dem engen Querschnitt tritt ein Unterdruck auf**, eine Erscheinung, die beim Bau von Wasserstrahlluftpumpen, von Dampfstrahlgebläsen und im Flugzeugbau in den Sogpumpen (hier mit Luft betrieben) Verwendung finden.

Zu achten ist beim Bau solcher Geräte, daß *der Übergang vom engen Querschnitt zum weiten in schlanker Form erfolgt*, um ein Abreißen der „Wasserfäden" zu verhindern. Da sich andernfalls die Austrittsöffnung nach F_2 verlegt und der erzeugte Unterdruck damit aufgehoben wird.

Beispiel:

Druckhöhe 40 m, *Austrittsöffnung* 3 qcm, *engste Öffnung* 2,8 qcm.

Es ist: $\underline{v_1} = \sqrt{2\,gh} = \sqrt{2\,g \cdot 40} = \approx \underline{28\ \text{m/sec.}}$

In F_2 ist:

$$\underline{v_2} = \frac{F_1}{F_2} \cdot v_1 = \frac{3}{2{,}8} \cdot 28 = \approx \underline{30\ \text{m/sec.}}$$

Was einer Druckhöhe entspricht von:

$$\underline{h'} = \frac{v^2}{2\,g} = \approx \underline{46\ \text{m.}}$$

Da nur eine Druckhöhe von 40 m vorhanden ist, wird der *Unterdruck*:

$$46 - 40 = 6\ \text{m Wassersäule.}$$

Das *gleiche Ergebnis* erzielt man auch nach Ziffer **61** aus der Beziehung:

$$\frac{h'}{h} = \frac{{F_2}^2}{{F_1}^2}.$$

Es ist: $h' = h \cdot \frac{{F_2}^2}{{F_1}^2}.$

$$\underline{h'} = 40 \cdot \frac{3^2}{2{,}8^2} = \underline{46\ \text{m.}}$$

C. Mechanik der luftförmigen Körper.

(Vgl. „Lehrblätter für die technische Ausbildung in der Luftwaffe", Abschnitt „Physik des Fliegens".)

63. Luftförmige Körper haben nicht nur kein Zusammenhaltevermögen (Kohäsion), sondern besitzen im Gegenteil eine Expansion, das heißt das Bestreben, einen (luft-) leeren Raum gleichmäßig auszufüllen.

64. Luftförmige Körper reagieren auf äußere Einflüsse sehr stark.

Druck vermindert ihren Rauminhalt,
Wärme vergrößert ihren Rauminhalt.
(Vgl. Ziffer 66...68.)

65. Die Gesetzmäßigkeit, die zwischen Druck und Rauminhalt eines luftförmigen Körpers besteht, haben die Physiker Boyle und Mariotte festgestellt.

Es verhalten sich unter gleichbleibender Temperatur die Rauminhalte umgekehrt wie die Drucke.

Mathematisch ausgedrückt:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

morin bedeuten:

V_1, V_2 die Rauminhalte (z. B. Kubikmeter),
p_1, p_2 die Drucke (z. B. kg pro qcm).

In anderer Form:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = C$$

d. h. **die Produkte aus Druck und Volumen (Rauminhalt) sind bei konstanter Temperatur gleich.**

66. Eine Ergänzung erfährt dieses Gesetz durch die Feststellungen des Physikers Gay-Lussac, der in bezug auf die Temperatur fand:

Das Volumen der luftförmigen Körper ist bei gleichem Druck verhältnisgleich den absoluten Temperaturen, also:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

67. Die absoluten Temperaturen werden vom **absoluten Nullpunkt** aus gemessen.

Die absolute Temperatur wurde aus hier nicht zu erörternden Gründen zu **—273°** festgestellt.

Beispiel:

Herrscht in einem Zimmer eine Temperatur von 17° Celsius, so ist also die absolute Temperatur

$$T = t + 273 = 290°.$$

68. Aus den Gleichungen der Ziffern **65** und **66** erhält man die Beziehung

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

d. h. **die Drucke verhalten sich bei gleichbleibenden Rauminhalten umgekehrt wie die absoluten Temperaturen.**

69. In dem hier vorliegenden Abschnitt sind nur diejenigen luftförmigen Körper von Belang, die in einer Beziehung zur Luftfahrt stehen.

Diese sind:

a) die atmosphärische Luft,

b) Traggase für Luftfahrtzeuge „leichter als Luft",
   also Leuchtgas, Wasserstoffgas und Helium.

Schließlich sind noch die Gase oder besser die Kraftstoff-Luftgemische zu erwähnen, die zum Antrieb der Verbrennungsmaschinen dienen.

70. Jedes Gas hat ein besonderes ihm eigentümliches Gewicht, das man auf den cbm des Gases bezieht. Man bezeichnet:

$$\boxed{\gamma = \frac{G}{V}} \quad \text{kg/m}^3$$

als die **Wichte des Gases.**

Man erkennt nach dem in den Ziffern 66 . . . 68 Gesagten, daß die Wichte eines Gases von dessen Temperatur und Druck abhängig ist.

Es ändert sich also die **Wichte der Luft** ständig mit dem Luftzustand.

71. Während man bei festen Körpern das spezifische oder Einheitsgewicht auf Wasser bezieht, **versteht man unter dem spezifischen Gewicht von Gasen das Verhältnis des Gewichtes eines Gasvolumens zu dem gleichen Volumen Luft von der gleichen Temperatur und dem gleichen Druck.**

Das spezifische Gewicht von Gasen ist also, unberührt von allen Druck- und Temperaturänderungen, immer gleich. Es ist eine unbenannte Zahl s.

72. Zu Vergleichszwecken wählt man als Normaldruck denjenigen, der einem Barometerstand von 760 mm Quecksilber entspricht und als Normaltemperatur 0°.

In diesem Zustand ist das spezifische Gewicht der Luft $s = 1$ zu setzen. Gleichzeitig ist aber deren Wichte $\gamma = 1{,}293$ kg/cbm.

Man erhält also das Verhältnis:

$$\boxed{\frac{s}{\gamma} = \frac{1}{1{,}293}} \quad \text{oder} \quad s = \frac{\gamma}{1{,}293}.$$

Mit diesen Beziehungen lassen sich Wichte und spezifisches Gewicht verschiedener Gase für den Normalzustand bestimmen.

Beispiele:

1. Beträgt die Wichte des Leuchtgases im Normalzustand, also bei 0° und 780 mm Barometerstand $\gamma = 0{,}5$ kg/cbm, so ist das spezifische Gewicht

$$s = \frac{\gamma}{1{,}293} = \frac{0{,}5}{1{,}293} = \underline{\underline{0{,}387.}}$$

2. Ist das spezifische Gewicht von Wasserstoff s = 0,06927, so ist im Normalzustand seine Wichte

$$\gamma = 1{,}293 \cdot s = 1{,}293 \cdot 0{,}06927 = 0{,}0896 \text{ kg/m}^3.$$

73. Der Druck, den die die Erde umgebende Lufthülle in Meereshöhe im Mittel ausübt, wurde zuerst von Torricelli beobachtet. Er fand, daß der Luftdruck (Atmosphärendruck) einer Quecksilbersäule von 760 mm das Gleichgewicht zu halten vermag.

Würde man an Stelle des Quecksilbers Wasser verwenden, so müßte die Wassersäule 10,33 m hoch werden, da das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,596 mal so groß als das des Wassers ist.

Nach dem in Ziffer **56** Gesagten entspricht diese Wassersäule einem Druck von 1,033 kg/qcm = 1,033 Atm. Die in der Technik übliche Einheit **1 Atm. = 1 kg/qcm** entspricht also einer Wassersäule von 10 m oder einer Quecksilbersäule von **735,51 mm Hg.**

74. Neuerdings geht man bei Bestimmung des Luftdruckes von der physikalischen Krafteinheit, dem Dyn, aus. (Vgl. auch Ziffer **10.**)

Da nach Ziffer **38** $m = \frac{G}{g}$ ist, wird für die Masseneinheit auf kg und m/s berechnet

$$10^6 \text{ Dyn} = 1{,}02 \text{ kg}.$$

Demzufolge bezeichnet man:

1,02 kg/qcm = 1 Bar
und **1,02 g/qcm = 1 mB** (Millibar).

Da eine Quecksilbersäule von 750 mm gerade einen Druck von 1,02 kg/qcm ausübt, kann man sagen

750 mm Hg = 1000 mB
oder **1 mB = 0,750 mm Hg**
und **1 mm Hg = 1,33 mB.**

Flugzeugbordgeräte sind heute alle auf Millibar geeicht.

Umrechnungsbeispiele:

1. Einer Quecksilbersäule (Barometerstand) von **745 mm** entsprechen: 745 · 1,33 = **993 mB.**
2. Die Geräteanzeige von **1010 mB** entspricht einem Luftdruck von 1,010 · 0,75 = **785 mm Hg.**

3. Dem Barometerstand von 735 mB entspricht ein Druck von $1{,}02 \cdot 735 =$ **750 g/qcm.**

75. Der in Ziffer **65** genannte Druck ist offenbar der Wichte verhältnismäßig gleich

$$\boxed{\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{p_1}{p_2}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}}$$

Beispiele:

1. Werden 2,5 cbm Leuchtgas (V_1) von der Wichte 0,5 kg/cbm (γ_1) auf 1,75 cbm bei gleicher Temperatur zusammengedrückt, so erhält man aus:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \frac{2{,}5}{1{,}75} = \frac{\gamma_2}{0{,}5}$$

$$\underline{\gamma_2} = \frac{0{,}5 \cdot 2{,}5}{1{,}75} = \underline{0{,}714 \text{ kg/m}^3.}$$

2. Die Wichte der atmosphärischen Luft bei 0° und 720 mm Hg (p_2) Barometerstand gewinnt man aus:

$$(\gamma_1 = 1{,}293, \ p_1 = 760 \text{ mm Hg})$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{1{,}293}{\gamma_2} = \frac{760}{720}$$

daraus $\underline{\gamma_2} = \frac{1{,}293 \cdot 720}{760} = \underline{1{,}225 \text{ kg/m}^3.}$

76. Der Luftdruck ändert sich nun nicht nur in gewissen Grenzen nach Maßgabe der Wetterlage, sondern nimmt auch mit der Höhe über dem Erdboden stetig ab. Diese Eigenschaft benutzt man zur (barometrischen) Höhenmessung. Als Nullpunkt wurde der mittlere Spiegel der Ostsee und der Nordsee festgelegt (NN = normal Null), der mit dem Amsterdamer Pegel übereinstimmt. Da der Luftdruck mit steigender Höhe nicht gleichmäßig abnimmt, sondern die Abnahme mit wachsender Höhe geringer wird, entwickelte man eine **Höhenformel,** welche lautet:

$$\boxed{h = 18\,400 \ (\lg b_1 - \lg b_2)} \ \text{m},$$

worin b_1 und b_2 die zwischen 2 Orten verschiedener Höhenlage herrschenden Barometerstände bedeuten.

Bei Flugzeugbarometern (Höhenmessern) ist für b_1 allgemein 760 mm Hg eingesetzt und die Angabe des Gerätes auf Meterhöhe berechnet und geeicht. (Vgl. Lehrblätter für die techn. Ausbildung der Luftwaffe, Abschn. Gerätekunde.)

Beispiel:

Ein Barometer zeigt 620 mm Hg an. Damit erhält man die Höhenlage des Ortes über normal Null (NN) zu:

$$h = 18400 (\lg 760 - \lg 620),$$

nach Ma Ziffer **66** und **Anhang 1** ist

$$\lg 760 = 2{,}8808$$
$$\lg 620 = 2{,}7924$$
$$\lg 760 - \lg 620 = 0{,}0884$$
$$h = \approx 1626 \text{ m.}$$

77. Jeder Körper erhält in der Luft einen **Auftrieb**, d. h. **er verliert soviel an Gewicht wie die von ihm verdrängte Luftmenge wiegt.**

Ist das Gewicht eines Körpers kleiner als das der von ihm verdrängten Luft, so wird er in die Höhe steigen. Auf dieser Tatsache beruhen Luftballons und Luftschiffe.

78. An Traggasen stehen zur Verfügung:

1. **Leuchtgas** .... Wichte 0,55 kg/cbm
2. **Wasserstoffreiche Leuchtgase** (Oechelhäuser) 0,23 kg/cbm
3. **Wasserstoff** (technisch) .... 0,12 kg/cbm
4. **Helium** .... 0,18 kg/cbm

Wichte jeweils bezogen auf 0° und 760 mm Hg.

Wasserstoff und Helium sind nicht giftig, da sie kein Kohlenoxyd enthalten. Helium hat dazu den Vorteil, unbrennbar zu sein. Allerdings ist sein Vorkommen nur sehr gering. Es wird in Erdquellen nur in U.S.A. in nennenswerten Mengen gewonnen.

79. Bedeutet G das Gewicht der Ballonhülle, der Gas-Füllung, des Korbes mit allem Zubehör, der Bemannung und der sonstigen Belastung und L das Gewicht der verdrängten Luftmenge, so ist der **Auftrieb:**

$$\boxed{A = L - G}$$

80. Die Ausstattung eines Luftballons (Freiballons) hat sich seit den ersten Aufstiegen des Professors Charles nicht wesentlich mehr geändert. Die kugelige **Ballonhülle** besteht im allgemeinen aus gummierter Baumwolle und wiegt etwa 0,5 kg/qm.

Es ist nur die Hälfte des Netzwerkes gezeichnet.

Am unteren Teil trägt die Hülle einen **Füllansatz** (F), der während der Luftfahrt stets geöffnet bleiben muß, um den sich mit der Höhe ausdehnenden Traggasen freien Austritt zu gewähren.

Um Gas zu sparen, wird beim Abflug gewöhnlich die Hülle nur zu einem Teil gefüllt.

Dem Füllansatz gegenüber auf der Oberseite des Ballons befindet sich das tellerförmige **Manöverventil** (V), das durch einen, durch den Füllansatz geführten Seilzug bedient werden kann.

Ebenfalls durch den Füllansatz geführt ist die gurtförmige Reißleine, mittels derer man imstande ist, die **Reißbahn** (Rb) zu öffnen, um so mit einem Zug die Hülle gasfrei zu machen, was bei der Landung besonders dann notwendig wird, wenn der Ballon durch den Wind abgetrieben wird.

Damit sich Reißleine und Ventilleine nicht verwickeln können, ist unter dem Füllansatz ein Holzkreuz angebracht, das die Leinen klar hält.

Der Auftrieb der Hülle wird auf ein **Netzwerk** (N) übertragen, das am Ventilring befestigt, die Kräfte über Leinen auf den **Korbring** (R) überträgt, an dem der aus Weiden geflochtene Korb (K) aufgehängt ist.

Der Korb nimmt die Bemannung und die Ausrüstung auf. Zur Ausrüstung gehört außer den Geräten zur Kurs- und Fluglagebestimmung vor allem der **Ballast** (B), der in Säcken in Form trockenen Sandes (um Gefriergefahr zu vermeiden) untergebracht ist. Dieser Ballast dient in Gemeinschaft mit dem Manövrierventil zur Höhensteuerung des Ballons.

Das **Schleppseil** (S) wird bei der Landung zur Abbremsung der Sinkgeschwindigkeit benutzt. Die Sinkgeschwindigkeit nimmt um so mehr ab, als zunehmende Länge des Seiles auf dem Erdboden aufliegt und damit das Gewicht des Freiballons verkleinert. Das Schleppseil ist am Korbring befestigt und am Korbrand so aufgerollt, das es sich durch Kappen einer Halteschnur zum Ablauf bringen läßt.

81. Die in einem Freiballon auftretenden Kräfte und Beziehungen werden am zweckmäßigsten in einer **Beispielsrechnung** klargemacht. Da es zu weit führen würde, die wärmemechanischen Verhältnisse zu behandeln, wird eine **gleichbleibende Temperatur von 0° vorausgesetzt.**

Folgende **Angaben** stehen zur Verfügung:

Ballondurchmesser	18 m
Füllung Leuchtgas	0,55 kg/cbm
Füllungsgrad	75%
Barometerstand am Füllort	740 mm Hg
Ring, Korb, Geräte	100 kg
Schleppseil 120 m	40 kg
Bemannung	300 kg
Ballast 20 Sack zu 15 kg	300 kg.

Damit ergeben sich folgende Rechnungen:

1. Das zu tragende **Gesamtgewicht:**

a) Die Hüllenoberfläche ist nach Ma Ziffer 131

$$\underline{M} = \pi d^2 = \pi \cdot 18^2 = \pi \cdot 324 = \underline{1620 \text{ m}^2}.$$

Bei einem Einheitsgewicht der Hülle von 0,5 kg/qcm wird also das **Hüllengewicht**

$$H = 1020 \cdot 0{,}5 = \mathbf{510 \text{ kg}}.$$

b) Ferner sind zu tragen nach obigen Angaben **740 kg.**

c) Auch das Leuchtgas selbst hat ein Gewicht, das sich aus dem Inhalt des Ballons errechnet. Sein Inhalt ist nach Ma Ziffer 131

$$\underline{J} = \frac{\pi d^3}{6} = \underline{3060 \text{ m}^3}.$$

Davon sind allerdings nach Angabe nur 75% = 0,75 zur Füllung ausgenutzt. Der tatsächliche Gasinhalt ist also

$$V = 3060 \cdot 0{,}75 = \mathbf{2295 \text{ m}^3}.$$

Bei 0° und 760 mm Hg ist die Wichte des Gases $\gamma_g = 0{,}55$ kg/cbm. Da aber bei der gleichen Temperatur der Luftdruck am Füllort nur 740 mm beträgt, wird nach Ziffer 75

$$\frac{\gamma_{g1}}{\gamma_g} = \frac{740}{760}, \quad \gamma_{g1} = \gamma_g \cdot \frac{740}{760}$$

$$\underline{\gamma_{g1}} = 0{,}55 \cdot \frac{740}{760} = \approx \underline{0{,}536 \text{ kg/m}^3}.$$

Damit wird also das Gewicht des **Leuchtgases**

$$Gg = 0{,}536 \cdot 2295 = \mathbf{1230 \text{ kg}}.$$

d) Das Gewicht aus den Positionen a ... c ist also

$$G = 510 + 740 + 1230 = \mathbf{2480 \text{ kg}}.$$

2. Das **Gewicht der verdrängten Luft** wird bestimmt durch das Volumen 2295 cbm und unterliegt der gleichen Druckkorrektur wie das des Gases. Die Luftwichte ist bei 0° und 760 Hg 1,293 kg/cbm, also nach Ziffer **75** bei 740 mm Hg

$$\underline{\gamma_L} = 1{,}293 \cdot \frac{740}{765} = \approx \underline{1{,}262 \text{ kg/m}^3}.$$

Damit wird das **Gewicht der verdrängten Luft**

$$L = 2295 \cdot 1{,}262 = \approx \underline{2896 \text{ kg.}}$$

3. Der **Auftrieb** ist somit nach Ziffer **79**

$$A = L - G = 2896 - 2480$$

$$A = \mathbf{416\ kg.}$$

4. Steigt der Ballon, so dehnt sich das in der Hülle befindliche Gas aus und wird schließlich diese vollkommen ausfüllen. Die dabei erreichte Höhe nennt man **Prallhöhe.**

Nach Ziffer **65** kann man setzen

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b_2}{b_1},$$

wobei b_1 und b_2 die Barometerstände bedeuten.

Ist V_1 gleich 2295 cbm das Startvolumen und $V_2 = 3060$ cbm das Prallvolumen, und ist ferner $b_1 = 740$ mm Hg der Barometerstand am Start, dann erhält man den zur Prallhöhe gehörigen Barometerstand aus

$$b_2 = \frac{V_1}{V_2} \cdot b_1 = \frac{2295}{3060} \cdot 740$$

$$\underline{b_2 = \cdot \approx 554 \text{ mm Hg.}}$$

Aus diesem Barometerstand kann man die **Höhe** nach Ziffer **76** ausrechnen.

Es ist:

$$h = 18\,400\ (\lg b_1 - \lg b_2)$$

$$h = 18\,400\ (\lg 740 - \lg 554).$$

Nach **Anhang 1:**

$$\lg 740 = 2{,}8692$$

$$\lg 554 = 2{,}7435$$

$$\lg 740 - \lg 554 = 0{,}1257$$

$$h = 18\,400 \cdot 0{,}1257.$$

Die **Prallhöhe** ist also:

$$\underline{h = \approx 2312 \text{ m.}}$$

5. Übersteigt der Ballon diese Prallhöhe, so verliert er Gas, das durch den Füllansatz ausströmt. Gleichzeitig nimmt aber auch sein Auftrieb ab, während sein Zustand „prall" bleibt.

Die größte **Steighöhe** ist dann erreicht, wenn der **Auftrieb Null** wird.

D. h. es wird

$$A = L - G = 0$$

oder

$$L = G.$$

Dabei ändert sich lediglich das **Gasgewicht**, da die festen Gewichtsgrößen (1 a u. b) unverändert bleiben. Sie sind

$$510 + 740 = \mathbf{1250\ kg}.$$

Bedeutet Gg das Gasgewicht, so kann man auch schreiben:

$$\mathbf{L = Gg + 1250.}$$

Für die größte Steighöhe ist der Barometerstand b_s. Die Luftwichte ist für diesen Barometerstand

$$\gamma_2' = \gamma_2 \cdot \frac{b_s}{760} = 1{,}293 \cdot \frac{b_s}{760}$$

und die Gaswichte für die gleiche Höhe

$$\gamma_g' = \gamma_g \cdot \frac{b_s}{760} = 0{,}55 \cdot \frac{b_s}{760}.$$

Da sich der Ballon im Prallzustand befindet, ist das Gesamtvolumen einzuführen mit 3060 cbm (vgl. 1 c).

Es ist also

$$L = 3060 \cdot \gamma_2 = 3060 \cdot 1{,}293 \frac{b_s}{760}$$

$$\text{und } Gg = 3060\ \gamma_g' = 3060 \cdot 0{,}55 \cdot \frac{b_s}{760}.$$

Damit erhält man

$$3060 \cdot 1.293 \frac{b_s}{760} = 3060 \cdot 0{,}55 \cdot \frac{b_s}{760} + 1250$$

$$\text{oder } 3060 \cdot 1{,}293 \cdot \frac{b_s}{760} - 3060 \cdot 0{,}55 \cdot \frac{b_s}{760} = 1250$$

$$\frac{3060}{760} \cdot 0{,}773 \cdot b_s = 1250.$$

Woraus man errechnen kann

$$b_s = \frac{1250 \cdot 760}{3060 \cdot 0{,}743}$$

den Luftdruck der maximalen Steighöhe

$$\underline{\underline{b_s = \approx 418\ \text{mm Hg}.}}$$

Aus der **Höhenformel (76)** erhält man die **maximale Steighöhe** zu

$$h = 18\,400\ (\lg b_1 - \lg b_2)$$

und nach **Anhang 1**

$$\lg 740 = 2{,}8692$$
$$\lg 418 = 2{,}6212$$
$$\lg 740 - \lg 418 = 0{,}2480$$
$$h = \approx \mathbf{4563\ m.}$$

Diese Höhe nennt man die **Gleichgewichtshöhe.** Verliert der Ballon aus irgendeinem Grunde mehr Gas, so ist der Gleichgewichtszustand gestört. Er sinkt ab und würde zur Erde gelangen, wenn nicht durch Ballastabgabe ein neuer Gleichgewichtszustand angesteuert würde.

Größere Höhen als die Gleichgewichtshöhe können durch Ballastabgabe erreicht werden, allerdings unter dauerndem Gasverlust.

6. Wie groß der Gasverlust beim Erreichen der Gleichgewichtshöhe ist, läßt sich leicht nach Ziffer **66** ermitteln.

Das anfängliche Volumen war (vgl. 1 c) $V_1 = 2295$ cbm bei einem Druck von 740 mm Hg.

Nun ist das

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Da auch der Enddruck in Gleichgewichtshöhe (vgl. 5) mit $b_2 = b_g = 418$ mm Hg bekannt ist, läßt sich das Endvolumen V_2 in Gleichgewichtshöhe ermitteln zu

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{b_1}{b_2} = 2295 \cdot \frac{740}{418}$$

$$V_2 = \approx \mathbf{4050\ m^3.}$$

Da aber der Ballon nur 3060 cm faßt, **gehen verloren**

$$\textbf{Verlust} = 4050 - \mathbf{3060} = \mathbf{990\ m^3}.$$

7. Soll der Gasverlust vermieden werden, d. h. soll der Ballon in seiner Gleichgewichtshöhe gerade auch die Prallhöhe erreichen, so ist sein **Füllungsgrad** herabzusetzen, bis der Auftrieb null wird. Mit anderen Worten, der Ballon befindet sich in allen Lagen bis zu seiner Prallhöhe im Gleichgewicht.

Bei Freiballonen ist dieser Zustand praktisch nicht möglich, da der Freiballon über einen gewissen Auftrieb verfügen muß, um schnell genug hoch und damit von Bäumen und Häusern freizukommen.

Anders ist es bei Luftschiffen, die „dynamisch", d. h. durch Motorenkraft und schräggestellten Steuerflächen in jeder Höhenlage unterhalb der Prallhöhe gehalten werden können. Allerdings tritt auch hier durch den Kraftstoffverbrauch eine dauernde Änderung der Gleichgewichtslage ein.

Soll die **„Prallhöhe"** des besprochenen Freiballons gleich der maximalen Steighöhe sein, so ist ein Gasvolumen zu entfernen, das dem freien Auftrieb von 416 kg entspricht (vgl. Z. 3).

Es ist:

$$L - Gg = 416$$

(Luftgewicht — Gasgewicht = 416).

Das Gas bzw. Luftvolumen sei mit V bezeichnet. Dann ist für den Barometerstand am Startort das

Luftgewicht: $V \cdot \gamma_L = V \cdot \gamma_L \cdot \frac{740}{760} = V \cdot 1{,}293 \cdot \frac{740}{760}$

Gasgewicht: $V \cdot \gamma_G = V \cdot \gamma_G \cdot \frac{740}{760} = V \cdot 0{,}55 \cdot \frac{740}{760}$

$$\text{also: } V \cdot \left(1{,}293 \cdot \frac{740}{760} - 0{,}55 \cdot \frac{740}{760}\right) = 416$$

$$V \cdot \left(0{,}743 \cdot \frac{740}{760}\right) = 416$$

Das **abzublasende Gasvolumen** also:

$$V = \frac{416 \cdot 760}{740 \cdot 0{,}743} = \mathbf{575\ m^3}$$

Da nur 2295 cbm aufgefüllt waren, sind also jetzt **nur noch vorhanden:** 2295 — 575 = 1720 cbm. Im ganzen würde der Ballon 3360 fassen. Er besitzt also nur noch einen **Füllungsgrad** von

$$\frac{1720}{3060} \cdot 100 = \approx 56\%$$

8. Schließlich kann noch untersucht werden, mit welcher Geschwindigkeit sich der Ballon erhebt.

Nach Ziffer **37** ist

$$P \cdot m \cdot b,$$

wobei in diesem Falle unter P der Auftrieb A verstanden sein soll.

Ferner ist nach Ziffer 38

$$m = \frac{G}{g},$$

so daß man schreiben kann

$$A = \frac{G}{g} \cdot b.$$

Hieraus erhält man die **Auftriebsbeschleunigung**

$$b = \frac{A \cdot g}{G}$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$b = \frac{416 \cdot 9{,}81}{2480} = \approx 1{,}65 \text{ m/s}^2$$

Mit dieser Beschleunigung „fällt" der Ballon nach oben.

Nach Ziffer 33 wird der Ballon (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) die **Gleichgewichtshöhe erreichen in der Zeit**

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4563}{1 \cdot 65}} = \approx 75 \text{ s}$$

(es ist in der Formel b = g gesetzt).

Wie beim freien Fall, so wird auch hier, nur bedeutend schneller, eine konstante Geschwindigkeit erreicht.

Teil III.

Anhang.

Mantissen der Briggsschen Logarithmen.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981

Mantissen der Briggsschen Logarithmen.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Tafel der trigonometrischen Funktionen.

Sinus $0^0 \div 45^0$

Grad	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	**89**
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0.0987	0,1016	0,1045	**84**
6	0.1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	**79**
11	0,1908	0,1937	0.1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	**74**
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	**69**
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	**64**
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0.4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	**59**
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	**54**
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	**49**
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0.6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad

Cosinus $45^0 \div 90^0$

Tafel der trigonometrischen Funktionen.

Grad	Sinus 45° ÷ 90°							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	**44**
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0.7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	**39**
51	0,7771	0 7790	0.7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	**34**
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0.8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	**29**
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0.9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	**24**
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	**19**
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0.9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	**14**
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	**9**
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9890	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0.9932	0,9936	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	**4**
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998	0,99985	1
89	0,99985	0,99989	0,99993	0,99996	0,99998	0,99999	1,0000	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cosinus 0° ÷ 45							

Tafel der trigonometrischen Funktionen.

Grad	Tangens 0° ÷ 45°							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,21[illegible]6	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2586	0,2617	0,2648	0,2679	75
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5206	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0.5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0.7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cotangens 45° ÷ 90°							

Tafel der trigonometrischen Funktionen.

Grad	Tangens 45° ÷ 90°							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	1,0000	1,0058	1,0117	1,0176	1,0235	1,0295	1,0355	44
46	1,0355	1,0416	1,0477	1,0538	1,0599	1,0661	1,0724	43
47	1,0724	1,0786	1,0850	0,0913	1,0977	1,1041	1,1106	42
48	1,1106	1,1171	1,1237	1,1303	1,1339	1,1436	1,1504	41
49	1,1504	1,1571	1,1640	1,1708	1,1778	1,1847	1,1918	40
50	1,1918	1,1988	1,2059	1,2131	1,2203	1,2276	1,2349	39
51	1,2349	1,2423	1,2497	1,2572	1,2647	1,2723	1,2799	38
52	1,2799	1,2876	1,2954	1,3032	1,3111	1,3190	1,3270	37
53	1,3270	1,3351	1,3432	1,3514	1,3597	1,3680	1,3764	36
54	1,3764	1,3848	1,3934	1,4019	1.4106	1,4193	1.4281	35
55	1,4281	1,4370	1,4460	1,4550	1,4641	1,4733	1,4826	34
56	1,4826	1,4919	1,5013	1,5108	1,5204	1,5301	1,5399	33
57	1,5399	1,5497	1,5597	1,5697	1,5798	1,5900	1,6003	32
58	1,6003	1,6107	1,6213	1,6318	1,6426	1,6534	1,6643	31
59	1,6643	1,6753	1,6864	1,6977	1,7090	1,7205	1,7321	30
60	1,7321	1,7438	1,7556	1,7675	1,7796	1,7917	1,8041	29
61	1,8041	1,8165	1,8291	1,8418	1,8546	1,8676	1,8807	28
62	1,8807	1,8940	1,9074	1,9210	1,9347	1,9486	1,9626	27
63	1,9626	1,9768	1,9912	2,0057	2,0204	2,0353	2,0503	26
64	2,0503	2,0655	2,0809	2,0965	2,1123	2,1283	2,1445	25
65	2,1445	2,1609	2,1775	2,1934	2,1113	2,2286	2,2460	24
66	2,2460	2,2637	2,2817	2,2998	2,3183	2,3369	2,3559	23
67	2,3559	2,3750	2,3945	2,4142	2,4342	2,4545	2,4751	22
68	2,4751	2,4960	2,5172	2,5387	2,5605	2,5826	2,6051	21
69	2,6051	2,6279	2,6511	2,6746	1,6985	2,7228	2,7475	20
70	2,7475	2,7725	2,7980	2,8239	2,8502	2,8770	2,9042	19
71	2,9042	2,9319	2,9600	2,9887	3,0178	3,0475	3.0777	18
72	3,0777	3,1084	3,1397	3,1716	3,2041	3,2371	3,2709	17
73	3,2709	3,3052	3,3402	3,3759	3,4124	3,4495	3,4874	16
74	3,4874	3,5261	3,5656	3,6059	3,6470	3,6891	3,7321	15
75	3,7321	3,7760	3,8208	3,8667	3,9136	3,9617	4,0108	14
76	4,0108	4,0611	4,1126	4,1653	4,2193	4,2747	4,3315	13
77	4,3315	4,3897	4,4494	4,5107	4,5736	4,6383	4,7046	12
78	4,7046	4,7729	4,8430	4,9152	4,9894	5,0658	5,1446	11
79	5,1446	5,2257	5,3093	5,3955	5,4845	5,5764	5,6713	10
80	5,6713	5,7694	5,8708	5,9758	6,0844	6,1970	6,3138	9
81	6,3138	6,4348	6,5605	6,6912	6,8269	6,9682	7,1154	8
82	7,1154	7,2687	7,4287	7,5958	7,7704	7,9530	8,1444	7
83	8,1444	8,3450	8,5556	8,7769	9,0098	9,2553	9,5144	6
84	9,5144	9,7882	10,0780	10,3854	10,7019	11,0594	11,4301	5
85	11,4301	11,8262	12,2505	12,7062	13,1969	13,7267	14,3007	4
86	14,3007	14,9244	15,6048	16,3499	17,1693	18,0750	19,0811	3
87	19,0811	20,2056	21,4704	22,9038	24,5418	26,4316	28,6363	2
88	28,6363	31,2416	34,3778	38,1885	42,9641	49,1039	57,2900	1
89	57,2900	68,7501	85,9398	114,5887	171,885	343,774	∞	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Grad
	Cotangens 0° ÷ 45°							

Griechische Buchstaben.

Alpha	Α	α	Jota	Ι	ι	Rho	Ρ	ϱ
Beta	Β	β	Kappa	Κ	ϰ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	Τ	τ
Delta	Δ	δ	My	Μ	μ	Ypsilon	Υ	υ
Epsilon	Ε	ε	Ny	Ν	ν	Phi	Φ	φ
Zeta	Ζ	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	Χ	χ
Eta	Η	η	Omikron	Ο	ο	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	ϑ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Römische Zahlen.

1 = I	20 = XX	200 = CC	1000 = M
2 = II	30 = XXX	300 = CCC	2000 = MM
3 = III	40 = XL	400 = CD	
4 = IV	50 = L	500 = D	Beispiel:
5 = V	60 = LX	600 = DC	253 = CCLIII
6 = VI	70 = LXX	700 = DCC	
7 = VII	80 = LXXX	800 = DCCC	1938 =
8 = VIII	90 = XC	900 = CM	MCMXXXVIII
9 = IX	100 = C	990 = XM	
10 = X		999 = IM	

Einheitsgewichte.

1. Feste Körper:

(Wasser bei 4° = 1,0.)

Stoff	
Aluminium	2,6
Aluminiumbronze	7,7
Anthrazit	1,4 ± 1,7
Antimon	6,7
Asbestpappe	1,2
Asphalt	1,1 ± 1,5
Bausteine (i. Mittel)	2,5
Beton	1,8 ± 2,4
Blei	11,4
Brauneisenstein	3,4 ± 4,0
Braunkohle	1,2 ± 1,5
Bronze	7,4 ± 8,9
Caliumkarbid	2,26
Chamotte	1,9 ± 2,1
Chrom	6,8
Deltametall (i. M.)	8,4
Diamant	3,5
Eis bei 0°	0,92
Flußeisen, Stahl	7,85
Glas, Fenster-	2,6
Glas, Spiegel-	2,5
Glas, Kristall-	2,9
Gold	19,3
Granit	2,5 ± 3,0
Graphit	2,0
Gummi (i. Mittel)	1,45
Gußeisen (i. Mittel)	7,3

Hölzer (i. M.).	trocken	frisch
Ahorn	0,7	0,9
Birke	0,75	0,9
Buchsbaum	0,98	1,2
Ebenholz	1,26	—
Eiche	0,9	1,1
Erle (Else)	0,55	0,88
Esche	0,7	0,86
Fichte (Rottanne)	0,45	0,8
Hickory	0,75	—
Kiefer	0,55	0,8
Nußbaum	0,7	0,9
Obstbaum	0,65	1,0
Pappel	0,45	0,8
Pockholz	1,3	—
Rotbuche	0,74	1,0
Tanne	0,58	0,95
Ulme (Rüster)	0,7	0,95
Weißbuche	0,71	1,1

Stoff	
Kalk, gelöscht	1,2
Kalkmörtel (i. M.)	1,7
Kautschuk	0,94
Kochsalz	2,15
Koks	1,4
Kork	0,24
Kunstsandstein	2,03
Kupfer	8,85
Leder	0,95
Marmor (i. M.)	2,72
Messing (i. M.)	8,6
Nickel (i. M.)	9,0
Phosphorbronze	8,8
Platin	21,3
Preßkohle (i. M.)	1,25
Roheisen, weiß (i. M.)	7,4
Roheisen, grau (i. M.)	7,2
Roteisenstein (i. M.)	4,7
Sand	
fein u. trocken	1,4 ± 1,6
fein u. feucht	1,9 ± 2,0
grob u. trocken	1,4 ± 1,5
Sandstein	2,2 ± 2,5

Schiefer	2,7
Schmirgel	4,0
Schweißeisen	7,8
Silber	10,5
Spateisenstein	3,8
Stahl (i. M.)	7,86
Steinkohle, geschichtet	1,2 ± 1,5
Weißmetall (i. M.)	7,1
Wismut	9,8
Wolfram	17,5
Ziegel, gewöhnl.	1,4 ± 1,6
Ziegel, Klinker	1,6 ± 2,2
Ziegel, Mauerw. (i. M.)	1,45
Ziegel-Mauerw., frisch (i. M.)	1,6
Zink (i. M.)	7,1
Zinn (i. M.)	7,3

2. Flüssige Körper bei 15°:

Äther	0,73
Alkohol	0,79
Benzin	0,68 ± 0,7
Benzol	0,89
Glyzerin	1,06
Meerwasser	1,03
Mineralschmieröl	0,9 ± 0,92
Petroleum (i. M.)	0,8

3. Gase u. Dämpfe:

(Luft bei 0° u. 760 mm Q.-S. = 1.)

Acetylen	0,91
Kohlenoxyd	0,967
Kohlensäure	1,529
Leuchtgas	0,35 ± 0,45
Sauerstoff	1,106
Stickstoff	0,971
Wasserdampf	0,623
Wasserstoffgas	0,069

1 cbm geschichtet wiegt kg:

Braunkohle	700 kg
Eis	900 "
Erde	1800 "
Formsand	1200 "
Getreide	680 "
Heu und Stroh	150 "
Holz	400 "
Holzkohle	200 "
gebrannter Kalk	1100 "
Koks	400 "
Preßkohle	950 "
Steinkohle	800 "
Torf	500 "
Zement	1400 "

Zusammenfassung der mechanischen Grundbegriffe.

1. **Gewicht:** 1 Kilogramm (kg) = Gewicht eines Liters chemisch reinen Wassers von 4° C.

2. **Kraft:** Zug oder Druck eines Kilogrammgewichtes technisches Maßsystem.

3. **Einheitsgewicht:** Gewicht der Volumeneinheit.

4. **Arbeit:** 1 Meterkilogramm (mkg) · A = Kraft · Weg = A = P · s.

5. **Leistung:** Arbeit: Zeit (Arbeit in der Zeiteinheit). Einheit der Leistung: 1 Pferdestärke (PS).

6. **Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung:** Weg in der Zeiteinheit.

7. **Gleichförmige Bewegung:** $s = v \cdot t$; s = Weg, v = Geschwindigkeit, t = Zeit.

8. **Beschleunigung:** Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit. Verzögerung: Geschwindigkeitsabnahme in der Zeiteinheit.

9. **Gleichförmig beschleunigte Bewegung:** $s = \frac{1}{2} b \cdot t$; $v = b \cdot t$ (b = Beschleunigung, v = veränderliche, d. h. wachsende Geschwindigkeit [im freien Fall b = g = Erdbeschleunigung = 9,81]).

10. **Wärmeeinheit:** (1 WE) = 1 Kilokalorie (kcal), d. i. die Wärmemenge, durch die 1 kg Wasser um 1° bei Atmosphärendruck erwärmt wird.

11. **Arbeitswert einer WE:** 427 mkg.

12. **1 Watt** = $^1/_{733}$ PS = elektrische Leistung. Bei Gleichstrom: 1 Watt = 1 Volt · 1 Ampere. Allgemein: Watt = E · I (E = Spannung in Volt, I = Stromstärke in Ampere).

Mittlere Geschwindigkeiten.

Fußgänger	1,5 ÷ 1,7 m/s
Fahrrad	30 km/h
Pferd am Lastwagen im Schritt	1,2 m/s
Güterzug	30 ÷ 40 km/h
Personenzug	45 ÷ 65 km/h
Schnellzug	70 ÷ 90 km/h
Personenkraftwagen	45 ÷ 90 km/h
Postdampfer	12 ÷ 15 Knoten
Schnelldampfer	16 ÷ 24 Knoten
Linienschiff	16 ÷ 22 Knoten
Torpedoboot	30 ÷ 35 Knoten
Luftschiff	33 m/s
Flugzeug	60 m/s
Mäßiger Wind	5 ÷ 7 m/s
Sturmwind	18 ÷ 40 m/s
Erdpunkt im Äquator	464 m/s
Erdpunkt in 50° Breite	298 m/s
Erde um die Sonne	29,6 km/s
Schall in der Luft	333 m/s
Schall im Wasser	1440 m/s
Licht im Raum	300 000 km/s

Tafel der Windstärke nach Beaufort.

	Wind-Bezeichnung	Mittlere Geschwindigkeit m/s	Druck kg/m²	Äußerung
0	Windstille	0—1,3	0—0,2	Rauch steigt gerade hoch.
1	Leiser Wind	3,6	1,5	für das Gefühl als Zug bemerkbar.
2	Flaue Brise	5,8	4,1	bewegt einen Wimpel und leichte Blätter.
3	Leichte Brise	8,0	7,7	
4	Mäßige Brise	10,3	12,6	streckt einen Wimpel und bewegt kleine Zweige.
5	Frische Brise	12,5	18,9	
6	Steife Brise	15,2	27,9	bewegt größere Baumzweige.
7	Harter Wind	17,9	38,7	
8	Stürmischer Wind	21,5	55,6	bewegt Äste und schwächere Bäume.
9	Sturm	25,0	75,6	
10	Starker Sturm	29,1	102,5	bricht Äste und mäßige Stämme.
11	Schwerer Sturm	33,5	135,7	deckt Häuser ab, entwurzelt große Bäume.
12	Orkan	40,2	195,5	